228,00 / nível superior no Canadá

"Se o cálculo é a linguagem do universo, então Steven Strogatz é o seu Homero. Com vivacidade, perspicácia e simplicidade, ele explica as ideias profundas que fundamentam uma das maiores conquistas intelectuais da humanidade."*Em poderes noturnos*É um prazer incalculável."

— DANIEL GILBERT,
autor de*Tropeçando na felicidade*

Em

sem cálculo,não teríamos Celulares, TV, GPS ou ultrassom. Não teríamos desvendado o DNA, descoberto Netuno ou inventado como colocar cinco mil músicas no seu bolso. Embora muitos de nós tenhamos sido afastados deste assunto essencial e fascinante no ensino médio e na faculdade, a história brilhantemente criativa e realista de Steven Strogatz nos permite mergulhar nesse tema.
Mostra que o cálculo não se trata de complexidade, mas sim de simplicidade. Ele utiliza um número irreal — o infinito — para resolver problemas do mundo real, decompondo-os em problemas mais simples e, em seguida, remontando as respostas em soluções que parecem milagrosas.

Em poderes noturnosEste livro narra como o

cálculo fascinou e emocionou seus inventores, desde seus primeiros vislumbres na Grécia Antiga até a descoberta das ondas gravitacionais (um fenômeno previsto pelo cálculo). Strogatz revela como essa forma de matemática se adaptou aos desafios de cada época: como determinar a área de um círculo usando apenas areia e um graveto; como explicar por que Marte às vezes se move "para trás"; como gerar eletricidade com ímãs; como garantir que seu foguete não erre a Lua; como reverter a situação na luta contra a AIDS. Como Strogatz demonstra, o cálculo é verdadeiramente a linguagem do universo. Ao desvendar os princípios dessa linguagem, ***Poderes da Noite*** nos faz maravilhar com o mundo de uma forma totalmente nova.

0419

Poderes Infinitos

Poderes Infinitos

Como o Cálculo Revela os Segredos do Universo

STEVEN STROGATZ

Um livro de Eamon Dolan

Houghton Mifflin Harcourt·Boston·Nova Iorque
2019

Direitos autorais © 2019 por Steven Strogatz
Ilustrações © 2019 por Margaret C. Nelson

Todos os direitos reservados.

Para obter informações sobre permissão para reproduzir trechos deste livro, escreva para trade.permissions@hmhco.com ou para Permissions, Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 3 Park Avenue, 19th Floor, New York, New York 10016.

hmhco.com

Dados de Catalogação na Publicação da Biblioteca do Congresso
Nomes: Strogatz, Steven H. (Steven Henry), autor.
Título: Poderes infinitos: como o cálculo revela os segredos do universo / Steven Strogatz. Descrição: Boston: Houghton Mifflin Harcourt, 2019.
Inclui referências bibliográficas e índice.
Identificadores: LCCN 2018042561 (impresso) | LCCN 2018049721 (e-book) | ISBN 9781328880017 (e-book) | ISBN 9781328879981 (capa dura) Assuntos: LCSH: Cálculo. | Cálculo—História. | Arquimedes. | Cálculo diferencial.
Classificação: LCC QA303.2 (e-book) | LCC QA303.2 .S78 2010 (impresso) | DDC 515—dc23
Registro da Biblioteca do Congresso disponível em https://lccn.loc.gov/2018042561

Projeto gráfico do livro por Christopher Granniss

Impresso nos Estados Unidos da América
DOC 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Conteúdo

Introdução vii

1. Infinito 1

2. O Homem Que Domou o Infinito 27

3. Descobrindo as Leis do Movimento 59

4. O Alvorecer do Cálculo Diferencial 89

5. A Encruzilhada 123

6. O Vocabulário da Mudança 141

7. A Fonte Secreta 167

8. Ficções da Mente 199

9. O Universo Lógico 227

10. Fazendo Ondas 249

11. O Futuro do Cálculo 271

Conclusão 295

Agradecimentos 303
Créditos das ilustrações: 307
Notas 309
Bibliografia 333
Índice 345

Introdução

Sem o cálculo, não teríamos celulares, computadores ou fornos de micro-ondas. Não teríamos rádio. Nem televisão. Nem ultrassom para gestantes, nem GPS para viajantes perdidos. Não teríamos

dividido o átomo, desvendado o genoma humano ou enviado astronautas à Lua. Talvez nem tivéssemos a Declaração de Independência.

É uma curiosidade histórica que o mundo tenha sido transformado para sempre por um ramo obscuro da matemática. Como foi possível que uma teoria originalmente sobre formas tenha acabado por remodelar a civilização?

A essência da resposta reside numa observação que o físico Richard Feynman fez ao romancista Herman Wouk quando discutiam o Projeto Manhattan. Wouk estava pesquisando para um grande romance que esperava escrever sobre a Segunda Guerra Mundial e foi ao Caltech entrevistar físicos que haviam trabalhado na bomba, um dos quais era Feynman. Após a entrevista, quando se despediam, Feynman perguntou a Wouk se ele sabia cálculo. Não, admitiu Wouk, não sabia. "É melhor você aprender", disse Feynman. "É a língua que Deus fala."

Por razões que ninguém compreende, o universo é profundamente matemático. Talvez Deus o tenha feito assim. Ou talvez seja a única maneira possível de um universo com nós existirmos, porque universos não matemáticos não podem abrigar vida inteligente o suficiente para fazer essa pergunta. De qualquer forma, é um fato misterioso e maravilhoso que nosso universo obedeça a leis da natureza que sempre acabam sendo expressáveis na linguagem do cálculo como sentenças chamadas equações diferenciais. Tais equações

Descrever a diferença entre algo agora e a mesma coisa um instante depois, ou entre algo aqui e a mesma coisa infinitesimalmente próxima. Os detalhes variam dependendo de qual aspecto da natureza estamos falando, mas a estrutura das leis é sempre a mesma. Para colocar essa afirmação impressionante de outra forma, parece haver algo como um código para o universo, um sistema operacional.

A ordem que anima tudo, momento a momento e lugar a lugar, é a ordem que o universo revela. O cálculo explora essa ordem e a expressa. Isaac Newton foi o primeiro a vislumbrar esse segredo do universo. Ele descobriu que as órbitas dos planetas, o ritmo das marés e as trajetórias das balas de canhão podiam ser descritas, explicadas e previstas por um pequeno conjunto de equações diferenciais. Hoje, chamamos essas equações de leis do movimento e da gravitação de Newton. Desde Newton, descobrimos que o

mesmo padrão se repete sempre que desvendamos uma nova parte do universo. Dos elementos básicos como terra, ar, fogo e água aos mais recentes elétrons, quarks, buracos negros e supercordas, tudo o que é inanimado no universo se submete à regra das equações diferenciais. Aposto que era isso que Feynman queria dizer quando afirmou que o cálculo é a linguagem que Deus fala. Se existe algo que merece ser chamado de segredo do universo, esse algo é o cálculo.

Ao descobrirem inadvertidamente essa linguagem estranha, primeiro em um recanto da geometria e depois no código do universo, em seguida, ao aprenderem a falá-la fluentemente e a decifrar seus idiomas e nuances, e finalmente ao aproveitarem seu poder de previsão, os humanos usaram o cálculo para remodelar o mundo.

Esse é o argumento central deste livro.

Se estiver certo, significa que a resposta para a pergunta fundamental sobre a vida, o universo e tudo mais não é 42, com as devidas desculpas aos fãs de Douglas Adams e*O Guia do Mochileiro das Galáxias*Mas o Pensador Profundo estava no caminho certo: o segredo do universo é de fato matemático.

Cálculo para todos

A observação de Feynman sobre a linguagem de Deus levanta muitas questões profundas. O que é cálculo? Como os humanos descobriram que Deus fala?

O que são equações diferenciais e qual o seu papel no mundo, não apenas na época de Newton, mas também na nossa? Por fim, como transmitir essas histórias e ideias de forma agradável e compreensível para leitores bem-intencionados como Herman Wouk, uma pessoa muito perspicaz, curiosa e culta, com pouca formação em matemática avançada?

Em um epílogo sobre seu encontro com Feynman, Wouk escreveu que só tentou aprender cálculo depois de quatorze anos. Seu grande romance se expandiu para dois grandes romances —*Ventos da Guerra*e *Guerra e Memória*, cada um com cerca de mil páginas. Depois de finalmente terminar esses, ele tentou aprender sozinho lendo livros com títulos como*Cálculo Simplificado*— mas sem sorte. Ele vasculhou alguns livros didáticos, na esperança, como ele mesmo disse, "de encontrar um que pudesse ajudar um

ignorante em matemática como eu, que passou seus anos de faculdade nas humanidades — isto é, literatura e filosofia — em uma busca adolescente pelo sentido da existência, sem saber que cálculo, do qual eu ouvira falar como uma matéria difícil e chata que não levava a lugar nenhum, era a linguagem de Deus". Depois que os livros didáticos se mostraram impenetráveis, ele contratou um professor particular de matemática israelense, na esperança de aprender um pouco de cálculo e melhorar seu hebraico falado, mas ambas as esperanças foram por água abaixo. Finalmente, em desespero, ele assistiu a uma aula de cálculo do ensino médio como ouvinte, mas ficou muito para trás e teve que desistir depois de alguns meses. Os alunos o aplaudiram na saída. Ele disse que foi como aplausos de pena para um patético showbiz.

Eu escrevi*Poderes Infinitos*Na tentativa de tornar as maiores ideias e histórias do cálculo acessíveis a todos, é importante ressaltar que não deveria ser necessário passar pelo que Herman Wouk passou para aprender sobre esse marco na história da humanidade. O cálculo é uma das conquistas coletivas mais inspiradoras da humanidade. Não é preciso aprender a fazer cálculo para apreciá-lo, assim como não é preciso aprender a preparar alta gastronomia para saboreá-la. Tentarei explicar tudo o que precisamos com a ajuda de imagens, metáforas e edotas. Também apresentarei algumas das melhores equações e demonstrações já criadas, pois como poderíamos visitar uma galeria sem admirar suas obras-primas? Quanto a Herman Wouk, ele tem 103 anos.

deste texto. Não sei se ele já aprendeu cálculo, mas se não, esta é para você, Sr. Wouk.

O Mundo Segundo o Cálculo

Como já deve estar claro, apresentarei a perspectiva de um matemático aplicado sobre a história e o significado do cálculo. Um historiador da matemática contaria a história de forma diferente. Assim como um matemático puro. O que me fascina como matemático aplicado é a tensão entre o mundo real ao nosso redor e o mundo ideal que criamos em nossas mentes. Os fenômenos que observamos guiam as questões matemáticas que formulamos; inversamente, a matemática que imaginamos às vezes antecipa o que de fato acontece na realidade. Quando isso ocorre, o efeito é surpreendente.

Ser matemático aplicado é ter uma visão ampla e ser intelectualmente versátil. Para quem trabalha na minha área, a matemática não é um mundo imaculado e hermeticamente fechado de teoremas e demonstrações que se repetem indefinidamente. Abraçamos todos os tipos de assuntos: filosofia, política, ciência, história, medicina, tudo. Essa é a história que quero contar — o mundo segundo o cálculo.

Esta é uma visão muito mais abrangente do cálculo do que o habitual. Ela engloba os muitos ramos e áreas afins do cálculo, tanto dentro da matemática quanto em disciplinas adjacentes. Como essa visão abrangente é incomum, quero garantir que não cause nenhuma confusão. Por exemplo, quando disse anteriormente que sem o cálculo não teríamos computadores, celulares e assim por diante, certamente não quis sugerir que o cálculo produziu todas essas maravilhas sozinho. Longe disso. Ciência e tecnologia foram parceiras essenciais — e, sem dúvida, as estrelas do espetáculo. Meu ponto é simplesmente que o cálculo também desempenhou um papel crucial, embora muitas vezes de apoio, na criação do mundo que conhecemos hoje.

Considere a história da comunicação sem fio. Ela começou com a descoberta das leis da eletricidade e do magnetismo por cientistas como Michael Faraday e André-Marie Ampère. Sem suas observações e experimentações, os fatos cruciais sobre ímãs, correntes elétricas,

e seus campos de força invisíveis teriam permanecido desconhecidos, e a possibilidade de comunicação sem fio jamais teria sido concretizada. Portanto, obviamente, a física experimental foi indispensável nesse contexto.

Mas o cálculo também era assim. Na década de 1860, um físico matemático escocês chamado James Clerk Maxwell reformulou as leis experimentais da eletricidade e do magnetismo em uma forma simbólica que pudesse ser inserida no funcionamento do cálculo. Após algum processamento, o cálculo gerou uma equação sem sentido. Aparentemente, algo estava faltando na física. Maxwell suspeitava que a lei de Ampère fosse a culpada. Ele tentou corrigi-la incluindo um novo termo em sua equação — uma corrente hipotética que resolveria a contradição — e então deixou o cálculo processar novamente. Desta vez, ele produziu um resultado sensato, uma equação de onda simples e elegante, muito parecida com a equação que descreve a propagação das ondulações em um

lago. Só que o resultado de Maxwell previa um novo tipo de onda, com campos elétricos e magnéticos dançando juntos em um pas de deux. Um campo elétrico variável geraria um campo magnético variável, que por sua vez regeneraria o campo elétrico, e assim por diante, cada campo impulsionando o outro, propagando-se juntos como uma onda de energia. E quando Maxwell calculou a velocidade dessa onda, descobriu — naquele que deve ter sido um dos maiores momentos de revelação da história — que ela se movia à velocidade da luz. Assim, ele usou o cálculo não apenas para prever a existência de ondas eletromagnéticas, mas também para resolver um mistério milenar: qual era a natureza da luz? A luz, ele percebeu, era uma onda eletromagnética.

A previsão de Maxwell sobre as ondas eletromagnéticas motivou um experimento realizado por Heinrich Hertz em 1887, que comprovou sua existência. Uma década depois, Nikola Tesla construiu o primeiro sistema de comunicação por rádio e, cinco anos depois, Guglielmo Marconi transmitiu as primeiras mensagens sem fio através do Atlântico. Logo vieram a televisão, os telefones celulares e tudo o mais.

É evidente que o cálculo sozinho não teria conseguido fazer isso. Mas, igualmente evidente, nada disso teria acontecido.*sem* cálculo. Ou, talvez mais precisamente, pode ter acontecido, mas apenas muito mais tarde, se é que chegou a acontecer.

Cálculo é mais do que uma linguagem

A história de Maxwell ilustra um tema que veremos repetidamente. Costuma-se dizer que a matemática é a linguagem da ciência. Há muita verdade nisso. No caso das ondas eletromagnéticas, foi um primeiro passo fundamental para Maxwell traduzir as leis descobertas experimentalmente em equações formuladas na linguagem do cálculo.

Mas a analogia com a linguagem é incompleta. O cálculo, assim como outras formas de matemática, é muito mais do que uma linguagem; é também um sistema de raciocínio incrivelmente poderoso. Ele nos permite transformar uma equação em outra realizando diversas operações simbólicas sobre elas, operações sujeitas a certas regras. Essas regras estão profundamente enraizadas na lógica, então, embora possa parecer que estamos apenas reorganizando símbolos, na verdade estamos construindo longas cadeias de inferência lógica. A reorganização de símbolos é

uma abreviação útil, uma maneira conveniente de construir argumentos complexos demais para serem mantidos em nossas mentes.

Se tivermos sorte e habilidade suficientes — se transformarmos as equações da maneira correta — podemos fazê-las revelar suas implicações ocultas. Para um matemático, o processo é quase palpável. É como se estivéssemos manipulando as equações, massageando-as, tentando relaxá-las o suficiente para que revelem seus segredos. Queremos que elas se abram e falem conosco.

É preciso criatividade, pois muitas vezes não fica claro quais manipulações realizar. No caso de Maxwell, havia inúmeras maneiras de transformar suas equações, todas logicamente aceitáveis, mas apenas algumas reveladoras do ponto de vista científico. Dado que ele nem sabia o que estava procurando, poderia facilmente não ter obtido nada além de murmúrios incoerentes (ou o equivalente simbólico disso) com suas equações. Felizmente, porém, elas tinham um segredo a revelar. Com o incentivo certo, revelaram a equação de onda.

Nesse ponto, a função linguística do cálculo assumiu o controle novamente. Quando Maxwell traduziu seus símbolos abstratos de volta para a realidade, eles previram que a eletricidade e o magnetismo poderiam se propagar juntos

como uma onda de energia invisível movendo-se à velocidade da luz. Em questão de décadas, essa revelação mudaria o mundo.

Injustificadamente eficaz

É impressionante como o cálculo consegue imitar a natureza tão bem, considerando o quão diferentes são os dois domínios. O cálculo é um reino imaginário de símbolos e lógica; a natureza é um reino real de forças e fenômenos. No entanto, de alguma forma, se a tradução da realidade para símbolos for feita com a devida precisão, a lógica do cálculo pode usar uma verdade do mundo real para gerar outra. Verdade entra, verdade sai. Comece com algo que seja empiricamente verdadeiro e formulado simbolicamente (como Maxwell fez com as leis da eletricidade e do magnetismo), aplique as manipulações lógicas corretas e surge outra verdade empírica, possivelmente uma nova, um fato sobre o universo que ninguém conhecia antes (como a existência de ondas eletromagnéticas).

Dessa forma, o cálculo nos permite vislumbrar o futuro e prever o desconhecido. É isso que o torna uma ferramenta tão poderosa para a ciência e a tecnologia.

Mas por que o universo deveria respeitar o funcionamento de qualquer tipo de lógica, muito menos o tipo de lógica que nós, meros humanos, conseguimos conceber? Foi isso que maravilhou Einstein quando escreveu: "O eterno mistério do mundo é a sua compreensibilidade". E foi isso que Eugene Wigner quis dizer em seu ensaio "Sobre a Eficácia Inexplicável da Matemática nas Ciências Naturais" quando escreveu: "O milagre da adequação da linguagem da matemática para a formulação das leis da física é uma dádiva maravilhosa que não compreendemos nem merecemos".

Essa sensação de admiração remonta à história da matemática. Segundo a lenda, Pitágoras a sentiu por volta de 550 a.C., quando ele e seus discípulos descobriram que a música era regida pelas proporções dos números inteiros. Por exemplo, imagine dedilhar uma corda de violão. Conforme a corda vibra, ela emite uma determinada nota. Agora, coloque o dedo em um traste exatamente no meio da corda e dedilhe-a novamente. A vibração...
A parte mais fina da corda agora tem metade do comprimento que tinha antes — uma proporção de 1 para 2 — e soa exatamente uma oitava acima do original.

nota (a distância musical de um*fazer* para o próximo no*dó-ré-mi fá-sol-lá-si-dó*escala). Se, em vez disso, a corda vibrante tiver 2/3 do seu comprimento original, a nota que ela produz sobe uma quinta (o intervalo de*fazer* para *sol;* (Pense nas duas primeiras notas do tema de Star Wars). E se a parte vibrante tiver 3/4 da duração anterior, a nota sobe uma quarta (o intervalo entre as duas primeiras notas de "Here Comes the Bride"). Os músicos da Grécia Antiga conheciam a construção melódica.
conceitos de oitavas, quartas e quintas e os considerava belos. Essa ligação inesperada entre música (a harmonia deste mundo) e números (a harmonia de um mundo imaginado) levou os pitagóricos à crença mística de que*todos* é o número. Diz-se que eles acreditavam que até mesmo os planetas em suas órbitas faziam música, a música das esferas.

Desde então, muitos dos maiores matemáticos e cientistas da história foram acometidos pela febre pitagórica. O astrônomo Johannes Kepler sofreu muito com isso. O mesmo aconteceu com

o físico Paul Dirac. Como veremos, essa febre os impulsionou a buscar, sonhar e ansiar pelas harmonias do universo. No fim, os levou a fazer suas próprias descobertas, que mudaram o mundo.

O Princípio do Infinito

Para ajudar você a entender para onde estamos indo, deixe-me dizer algumas palavras sobre o que é cálculo, o que ele busca (metaforicamente falando) e o que o distingue do restante da matemática. Felizmente, uma única grande e bela ideia permeia a disciplina do início ao fim. Uma vez que tomamos consciência dessa ideia, a estrutura do cálculo se encaixa como variações de um tema unificador.

Infelizmente, a maioria dos cursos de cálculo enterra o tema sob uma avalanche de fórmulas, procedimentos e truques computacionais. Pensando bem, nunca o vi explicitado em lugar nenhum, embora faça parte da cultura do cálculo e todo especialista o conheça implicitamente. Vamos chamá-lo de Princípio do Infinito. Ele nos guiará em nossa jornada, assim como guiou o desenvolvimento do próprio cálculo, tanto conceitualmente quanto historicamente.
Cally. Estou tentada a afirmar isso agora mesmo, mas neste ponto soaria como um disparate. Será mais fácil de entender se formos com calma.

Chegamos a essa conclusão perguntando o que o cálculo quer... e como ele consegue o que quer.

Em resumo, o cálculo busca simplificar problemas complexos. Ele é completamente obcecado pela simplicidade. Isso pode ser uma surpresa, visto que o cálculo tem fama de ser complicado. E não se pode negar que alguns de seus principais livros didáticos ultrapassam mil páginas.
As folhas de papel são volumosas e pesam tanto quanto tijolos. Mas não vamos julgá-las. O cálculo não pode controlar sua aparência. Seu tamanho é inevitável. Parece complicado porque tenta resolver problemas complicados. De fato, ele já enfrentou e resolveu alguns dos problemas mais difíceis e importantes que nossa espécie já enfrentou.

O cálculo é bem-sucedido ao decompor problemas complexos em partes mais simples. Essa estratégia, é claro, não é exclusiva do

cálculo. Todos os bons solucionadores de problemas sabem que problemas difíceis se tornam mais fáceis quando divididos em partes menores. A abordagem verdadeiramente radical e distintiva do cálculo é que ele leva essa estratégia de dividir para conquistar ao seu extremo máximo.*até o infinito*Em vez de cortar um grande problema
Dividido em pedaços minúsculos, o algoritmo continua cortando e cortando implacavelmente até que o problema seja reduzido e pulverizado em suas menores partes imagináveis, resultando em infinitas delas. Feito isso, ele resolve o problema original para todas as pequenas partes, o que geralmente é uma tarefa muito mais fácil do que resolver o problema gigante inicial. O desafio restante, então, é juntar todas as pequenas respostas novamente. Essa etapa tende a ser muito mais difícil, mas pelo menos não é tão complexa quanto o problema original.

Assim, o cálculo procede em duas fases: corte e reconstrução. Em termos matemáticos, o processo de corte envolve sempre uma subtração infinitamente fina, que é usada para quantificar as diferenças entre as partes. Consequentemente, esta metade do assunto é chamada de*diferencial*cálculo. O processo de remontagem sempre envolve adição infinita, que integra as partes de volta ao todo original. Esta metade do assunto é chamada de cálculo.*integral*cálculo.

Essa estratégia pode ser usada em qualquer coisa que possamos imaginar sendo fatiada infinitamente. Essas coisas infinitamente divisíveis são chamadas de...*continua*e dizem ser*contínuo*, das raízes latinas*com* (juntamente com) e*segurar* (segurar), que significa ininterrupto ou que se mantém unido. Pense em

A borda de um círculo perfeito, uma viga de aço em uma ponte suspensa, uma tigela de sopa esfriando na mesa da cozinha, a trajetória parabólica de um dardo em voo ou o tempo que você está vivo. Uma forma, um objeto, um líquido, um movimento, um intervalo de tempo — todos eles.
são matéria-prima para o cálculo. Todas são contínuas, ou quase. Observe o ato de fantasia criativa aqui. Sopa e aço não são realmente contínuos. Na escala da vida cotidiana, parecem ser, mas na escala de átomos ou supercordas, não são. O cálculo ignora o inconveniente imposto por átomos e outras entidades indivisíveis, não porque não existam, mas porque é útil fingir que não existem. Como veremos, o cálculo tem uma predileção por ficções úteis. De

maneira mais geral, os tipos de entidades modeladas como contínuos pelo cálculo incluem quase tudo o que se possa imaginar. O cálculo tem sido usado para descrever como uma bola rola continuamente por uma rampa, como um raio de sol viaja continuamente pela água, como o fluxo contínuo de ar ao redor de uma asa mantém um beija-flor ou um avião no ar e como a concentração de partículas do vírus HIV na corrente sanguínea de um paciente cai continuamente nos dias seguintes ao início da terapia combinada de medicamentos. Em todos os casos, a estratégia permanece a mesma: dividir um problema complexo, porém contínuo, em infinitas partes mais simples, resolvê-las separadamente e depois juntá-las novamente.

Agora finalmente estamos prontos para apresentar a grande ideia.

O Princípio do Infinito

Para elucidar qualquer forma, objeto, movimento, processo ou fenômeno contínuo — por mais complexo e intrincado que pareça —, imagine-o como uma série infinita de partes mais simples, analise-as e, em seguida, junte os resultados para dar sentido ao todo original.

O Golem do Infinito

O problema em tudo isso é a necessidade de lidar com o infinito. Isso é mais fácil dizer do que fazer. Embora o uso cuidadosamente controlado do infinito

O infinito é o segredo do cálculo e a fonte de seu enorme poder preditivo, mas também a sua maior dor de cabeça. Como o monstro de Frankenstein ou o golem do folclore judaico, o infinito tende a escapar do controle de seu criador. Como em qualquer história de arrogância, o monstro inevitavelmente se volta contra seu criador.

Os criadores do cálculo estavam cientes do perigo, mas ainda assim acharam o infinito irresistível. Claro, ocasionalmente ele se descontrolava, deixando paradoxos, confusão e caos filosófico em seu rastro. Contudo, após cada um desses episódios, os matemáticos sempre conseguiam subjugar o monstro.

O cálculo racionalizava seu comportamento e o colocava de volta

ao trabalho. No fim, tudo sempre acabava bem. O cálculo fornecia as respostas certas, mesmo quando seus criadores não conseguiam explicar o porquê. O desejo de dominar o infinito e explorar seu poder é um fio condutor que percorre toda a história de dois mil e quinhentos anos do cálculo.

Toda essa conversa sobre desejo e confusão pode parecer deslocada, visto que a matemática geralmente é retratada como exata e impecavelmente racional. Ela é racional, mas nem sempre inicialmente. A criação é intuitiva; a razão vem depois. Na história do cálculo, mais do que em outras áreas da matemática, a lógica sempre esteve atrás da intuição. Isso faz com que a disciplina pareça especialmente humana e acessível, e seus gênios mais parecidos com o resto de nós.

Curvas, Movimento e Mudança

O Princípio do Infinito organiza a história do cálculo em torno de um tema metodológico. Mas o cálculo trata tanto de mistérios quanto de metodologia. Três mistérios, acima de todos os outros, impulsionaram seu desenvolvimento: o mistério das curvas, o mistério do movimento e o mistério da mudança.

A fecundidade desses mistérios tem sido uma prova do valor da pura curiosidade. Enigmas sobre curvas, movimento e mudança podem parecer insignificantes à primeira vista, talvez até irremediavelmente esotéricos. Mas, como abordam questões conceituais tão ricas e porque a matemática está tão profundamente entrelaçada na estrutura do universo, a solução desses mistérios teve impactos de longo alcance no curso da civilização e em nosso cotidiano. Como veremos adiante...

Nos capítulos seguintes, colhemos os frutos dessas investigações sempre que ouvimos música em nossos telefones, passamos rapidamente pela fila do supermercado graças a um leitor a laser no caixa ou encontramos o caminho de casa com um dispositivo GPS.

Tudo começou com o mistério das curvas. Aqui estou usando o termo*curvas*Em um sentido muito amplo, o termo pode se referir a qualquer tipo de linha curva, superfície curva ou sólido curvo — pense em um elástico, uma aliança de casamento, uma bolha flutuando, os contornos de um vaso ou um tubo sólido de salame. Para manter as coisas o mais simples possível, os primeiros geômetras geralmente se concentravam em versões abstratas e

idealizadas de formas curvas e ignoravam a espessura, a rugosidade e a textura. A superfície de uma esfera matemática, por exemplo, era imaginada como uma membrana infinitesimalmente fina, lisa e perfeitamente redonda, sem nenhuma das características espessas.
A textura, as irregularidades ou a textura da casca de um coco. Mesmo sob essas suposições idealizadas, as formas curvas apresentavam dificuldades conceituais desconcertantes porque não eram feitas de peças retas. Triângulos e quadrados eram fáceis. Assim como cubos. Eles eram compostos de linhas retas e peças planas unidas por um pequeno número de vértices. Não era difícil calcular seus perímetros, áreas de superfície ou volumes. Geômetras de todo o mundo — na antiga Babilônia e Egito, China e Índia, Grécia e Japão — sabiam como resolver problemas como esses. Mas objetos redondos eram um pesadelo. Ninguém conseguia descobrir quanta área de superfície uma esfera tinha ou quanto volume ela podia conter. Mesmo encontrar a circunferência e a área de um círculo era um problema insuperável antigamente. Não havia como começar. Não havia peças retas para se basear. Qualquer coisa que fosse curva era indecifrável.

Foi assim que o cálculo começou. Surgiu da curiosidade e da frustração dos geômetras com a circularidade. Círculos, esferas e outras formas curvas eram o Himalaia daquela época. Não que representassem grandes desafios práticos, pelo menos não a princípio. Era simplesmente uma questão da sede de aventura do espírito humano. Como exploradores escalando o Monte Everest, os geômetras queriam desvendar as curvas porque elas estavam lá.

A solução surgiu da insistência em que as curvas*eram* na verdade era feito de peças retas. Não era verdade, mas dava para fingir que era.

Era mesmo. O único problema era que essas partes teriam que ser infinitesimalmente pequenas e infinitamente numerosas. Através dessa concepção fantástica, nasceu o cálculo integral. Este foi o primeiro uso do Princípio do Infinito. A história de como ele se desenvolveu nos ocupará por vários capítulos, mas sua essência já está lá, em forma embrionária, em uma percepção simples e intuitiva: se ampliarmos suficientemente um círculo (ou qualquer outra coisa que seja curva e lisa), a porção sob o microscópio começa a parecer reta e plana. Portanto, em princípio, pelo menos, deveria ser possível calcular o que quiséssemos sobre uma forma curva somando todas as pequenas partes retas. Descobrir

exatamente como fazer isso — uma tarefa nada fácil — exigiu os esforços dos maiores matemáticos do mundo ao longo de muitos séculos.

Contudo, com o tempo, e por vezes através de rivalidades acirradas, eles eventualmente começaram a progredir na solução do enigma das curvas. Como veremos no capítulo 2, as áreas derivadas dessa tecnologia incluem a matemática necessária para desenhar cabelos, roupas e rostos realistas de personagens em filmes de animação computadorizada, bem como os cálculos necessários para que os médicos realizem cirurgias faciais.

A cirurgia em um paciente virtual antes da operação no paciente real. A busca para desvendar o mistério das curvas atingiu o auge quando ficou claro que as curvas eram muito mais do que meros artifícios geométricos. Elas eram a chave para desvendar os segredos da natureza. Surgiam naturalmente no arco parabólico de uma bola em voo, na órbita elíptica de Marte ao redor do Sol e na forma convexa de uma lente que podia curvar e focalizar a luz onde fosse necessário, como era preciso para o desenvolvimento crescente de microscópios e telescópios no final do Renascimento europeu.

E assim começou a segunda grande obsessão: o fascínio pelos mistérios do movimento na Terra e no sistema solar. Através da observação e de experimentos engenhosos, os cientistas descobriram padrões numéricos intrigantes nas coisas mais simples em movimento. Mediram o balanço de um pêndulo, cronometraram a aceleração descendente de uma bola rolando por uma rampa e mapearam a majestosa procissão dos planetas pelo céu. Os padrões que encontraram os extasiaram — de fato, Johannes Kepler entrou em um estado de autodenominado "frenesi sagrado" quando descobriu suas leis do movimento planetário — porque esses padrões pareciam ser sinais da obra de Deus. De uma perspectiva mais...

De uma perspectiva secular, os padrões reforçavam a afirmação de que a natureza era profundamente matemática, tal como os pitagóricos haviam defendido. O único problema era que ninguém conseguia explicar os novos e maravilhosos padrões, pelo menos não com as formas de matemática existentes. A aritmética e a geometria não eram suficientes, nem mesmo nas mãos dos maiores matemáticos.

O problema era que os movimentos não eram constantes. Uma

bola rolando por uma rampa mudava constantemente de velocidade, e um planeta orbitando o Sol mudava constantemente de direção. Pior ainda, os planetas se moviam mais rápido quando se aproximavam do Sol e diminuíam a velocidade à medida que se afastavam. Não havia maneira conhecida de lidar com um movimento que mudava de forma constante. Matemáticos anteriores haviam desenvolvido a matemática do tipo mais trivial de movimento, ou seja, o movimento a uma velocidade constante, onde a distância é igual à velocidade multiplicada pelo tempo. Mas quando a velocidade mudava e continuava mudando continuamente, tudo estava perdido. O movimento estava se revelando um desafio conceitual tão grande quanto as curvas.

Como veremos nos capítulos intermediários deste livro, os grandes avanços seguintes no cálculo surgiram da busca para desvendar o mistério do movimento. O Princípio do Infinito veio em nosso auxílio, assim como fizera com as curvas. Desta vez, o ato de fantasia ilusória consistia em fingir que o movimento...
A ação em velocidade variável era composta por infinitos movimentos infinitesimalmente breves em uma*constante*velocidade. Para visualizar o que isso significa, imagine estar em um carro com um motorista imprudente ao volante. Enquanto você observa ansiosamente o velocímetro, ele sobe e desce a cada solavanco. Mas em um milissegundo, nem mesmo o motorista mais imprudente consegue fazer o ponteiro do velocímetro se mover muito. E em um intervalo muito menor que esse — um intervalo de tempo infinitesimal — o ponteiro não se move de forma alguma. Ninguém consegue pisar no acelerador tão rápido.

Essas ideias convergiram na primeira metade do cálculo, o cálculo diferencial. Era exatamente o que se precisava para lidar com as mudanças infinitesimalmente pequenas de tempo e distância que surgiam no estudo do movimento em constante mudança, bem como com os segmentos retos infinitesimais de curvas que surgiam na geometria analítica, o estudo inovador de curvas definidas por equações algébricas que era a grande moda na primeira metade do século XVII. Sim, houve uma época em que a álgebra era uma febre, como veremos.

Sua popularidade foi uma dádiva para todos os campos da matemática, incluindo a geometria, mas também criou uma selva indomável de novas curvas para explorar. Assim, os mistérios das curvas e do movimento colidiram. Ambos estavam agora no centro

do palco do cálculo em meados de 1600, chocando-se um com o outro, criando caos e confusão matemática. Em meio ao tumulto, o cálculo diferencial começou a florescer, mas não sem controvérsia. Alguns matemáticos foram criticados por lidarem de forma leviana com o infinito. Outros ridicularizaram a álgebra como um amontoado de símbolos. Com todas as disputas, o progresso foi irregular e lento.

E então, no dia de Natal, nasceu uma criança. Esse jovem messias do cálculo era um herói improvável. Nascido prematuro, órfão de pai e abandonado pela mãe aos três anos de idade, era um menino solitário com pensamentos sombrios que se tornou um jovem reservado e desconfiado. No entanto, Isaac Newton deixaria sua marca no mundo como ninguém antes ou depois dele.

Primeiro, ele resolveu o Santo Graal do cálculo: descobriu como juntar as partes de uma curva novamente — e como fazer isso de forma fácil, rápida e sistemática. Combinando os símbolos da álgebra com a potência do infinito, ele encontrou uma maneira de representar qualquer curva como a soma de infinitas curvas mais simples descritas por potências de uma variável.x, como x^2,x^3,x^4E assim por diante. Só com esses ingredientes, ele podia criar qualquer curva que quisesse, adicionando uma pitada de$x$e uma pitada dex^2 e uma colher de sopa bem cheia dex^3Era como uma receita mestra e um armário de temperos universal, um açougue e uma horta, tudo em um só. Com ele, ele podia resolver qualquer problema sobre formas ou movimentos que já tivesse sido considerado.

Então ele decifrou o código do universo. Newton descobriu que qualquer tipo de movimento sempre se desenrola um passo infinitesimal de cada vez, guiado a cada instante por leis matemáticas escritas na linguagem do cálculo. Com apenas alguns passos diferentes, ele conseguiu decifrar o código do universo. Com suas equações essenciais (suas leis do movimento e da gravidade), ele podia explicar tudo, desde a trajetória de uma bala de canhão até as órbitas dos planetas. Seu surpreendente "sistema do mundo" unificou o céu e a terra, lançou o Iluminismo e transformou a cultura ocidental. Seu impacto sobre os filósofos e poetas da Europa foi imenso. Ele influenciou até mesmo Thomas Jefferson e a redação da Declaração de Independência.

Independência, como veremos. Em nossa época, as ideias de

Newton sustentaram o programa espacial, fornecendo a matemática necessária para o planejamento de trajetórias, trabalho realizado na NASA pela matemática afro-americana Katherine Johnson e seus colegas (as heroínas do livro e do filme de sucesso).*Figuras Ocultas*).

Com os mistérios das curvas e do movimento agora resolvidos, o cálculo passou para sua terceira obsessão: o mistério da mudança. É um clichê, mas não deixa de ser verdade — nada é constante, exceto a mudança. Um dia está chuvoso e no outro ensolarado. O mercado de ações sobe e desce. Encorajados pelo paradigma newtoniano, os praticantes posteriores do cálculo perguntaram: Existem leis da mudança semelhantes às leis do movimento de Newton? Existem leis para o crescimento populacional, a propagação de epidemias e o fluxo sanguíneo em uma artéria? O cálculo pode ser usado para descrever como os sinais elétricos se propagam ao longo dos nervos ou para prever o fluxo de tráfego em uma rodovia?

Ao perseguir essa agenda ambiciosa, sempre em cooperação com outras áreas da ciência e da tecnologia, o cálculo contribuiu para a modernização do mundo. Por meio da observação e da experimentação, os cientistas descobriram as leis da mudança e, em seguida, usaram o cálculo para resolvê-las e fazer previsões. Por exemplo, em 1917, Albert Einstein aplicou o cálculo

culus para um modelo simples de transições atômicas para prever um efeito notável chamado emissão estimulada (que é o que o*se e* representar em*laser*, uma sigla para*amplificação da luz por emissão estimulada de radiação*Ele teorizou que, sob certas circunstâncias, a luz que atravessa a matéria poderia estimular a produção de mais luz no mesmo comprimento de onda e movendo-se na mesma direção, criando

A ideia era criar uma cascata de luz através de uma espécie de reação em cadeia que resultaria em um feixe intenso e coerente. Algumas décadas depois, a previsão provou ser correta. Os primeiros lasers funcionais foram construídos no início da década de 1960. Desde então, eles têm sido usados em tudo, desde leitores de discos compactos e armas guiadas a laser até leitores de código de barras em supermercados e lasers médicos.

As leis da mudança na medicina não são tão bem compreendidas quanto as da física. No entanto, mesmo quando aplicado a modelos rudimentares, o cálculo tem sido capaz de fazer contribuições que salvam vidas. Por exemplo, no capítulo 8, veremos como um modelo de equação diferencial desenvolvido por

Um imunologista e um pesquisador da AIDS desempenharam um papel fundamental na formulação da moderna terapia combinada com três medicamentos para pacientes infectados pelo HIV. As informações fornecidas pelo modelo derrubaram a visão predominante de que o vírus permanecia latente no corpo; na verdade, ele travava uma batalha intensa contra o sistema imunológico a cada minuto de cada dia. Com a nova compreensão que o cálculo ajudou a proporcionar, a infecção pelo HIV deixou de ser uma sentença de morte quase certa para se tornar uma doença crônica controlável — pelo menos para aqueles que têm acesso à terapia combinada.

É verdade que alguns aspectos do nosso mundo em constante mudança estão além das aproximações e ilusões inerentes ao Princípio do Infinito. No reino subatômico, por exemplo, os físicos não podem mais pensar em um elétron como uma partícula clássica seguindo uma trajetória suave da mesma forma que um planeta ou uma bala de canhão. De acordo com a mecânica quântica, as trajetórias tornam-se instáveis, imprecisas e mal definidas na escala microscópica, então precisamos descrever o comportamento dos elétrons como ondas de probabilidade em vez de trajetórias newtonianas. Assim que fazemos isso, no entanto, o cálculo retorna triunfante. Ele governa a evolução das ondas de probabilidade por meio de algo chamado equação de Schrödinger.

É incrível, mas é verdade: mesmo no reino subatômico, onde a física newtoniana deixa de funcionar, o cálculo newtoniano ainda funciona. Aliás, funciona de forma espetacular. Como veremos nas páginas seguintes, ele se uniu à mecânica quântica para prever os efeitos notáveis que fundamentam as imagens médicas, desde ressonâncias magnéticas e tomografias computadorizadas até a mais exótica tomografia por emissão de pósitrons.

Chegou a hora de analisarmos mais de perto a linguagem do universo. Naturalmente, o ponto de partida é o infinito.

1

Infinito

Os primórdios da matemática estavam enraizados em preocupações cotidianas. Pastores precisavam controlar seus rebanhos. Agricultores precisavam pesar os grãos colhidos. Cobradores de impostos tinham que calcular quantas vacas ou galinhas cada camponês devia ao rei. Dessas necessidades práticas surgiu a invenção dos números. Inicialmente, eram contados nos dedos das mãos e dos pés. Mais tarde, passaram a ser gravados em ossos de animais. À medida que sua representação evoluía de rabiscos para símbolos, os números facilitaram tudo, desde a tributação e o comércio até a contabilidade e o recenseamento. Vemos evidências disso em tabuletas de argila mesopotâmicas escritas há mais de cinco mil anos: fileiras e mais fileiras de entradas registradas com os símbolos em forma de cunha chamados escrita cuneiforme.

Além dos números, as formas também importavam. No antigo Egito, a medição de linhas e ângulos era de suma importância. Todos os anos, os agrimensores tinham que redesenhar os limites dos campos agrícolas depois que as cheias do Nilo, no verão, apagavam as linhas divisórias. Essa atividade mais tarde deu nome ao estudo das formas em geral:*geometria*, do grego*gē*, “terra” e*em metros*, “medidor”.

No início, a geometria era rígida e com cantos vivos. Sua predileção por linhas retas, planos e ângulos refletia suas origens utilitárias — triângulos eram úteis como rampas, pirâmides como monumentos e túmulos, e retângulos como tampos de mesa, altares e demarcação de terrenos. Construtores e carpinteiros usavam ângulos retos para linhas de prumo.

Marinheiros, arquitetos e sacerdotes, o conhecimento da geometria em linha reta era essencial para levantamentos topográficos, navegação, manutenção do calendário, previsão de eclipses e construção de templos e santuários.

Mesmo quando a geometria se concentrava na retidão, uma curva sempre se destacava, a mais perfeita de todas: o círculo. Vemos círculos nos anéis das árvores, nas ondulações de um lago,

no formato do sol e da lua. Os círculos nos cercam na natureza. E enquanto contemplamos os círculos, eles nos contemplam de volta, literalmente. Estão presentes nos olhos de nossos entes queridos, nos contornos circulares de suas pupilas e íris. Os círculos abrangem o prático e o emocional, como rodas e alianças de casamento, e também são místicos. Seu eterno retorno sugere o ciclo das estações, a reencarnação, a vida eterna e o amor infinito. Não é de admirar que os círculos atraiam a atenção desde que a humanidade estuda as formas.

Matematicamente, os círculos representam a mudança sem mudança. Um ponto que se move ao longo da circunferência de um círculo muda de direção sem jamais alterar sua distância do centro. É uma forma mínima de mudança, uma maneira de mudar e curvar da forma mais sutil possível. E, claro, os círculos são simétricos. Se você girar um círculo em torno de seu centro, ele parecerá inalterado. Essa simetria rotacional pode ser o motivo pelo qual os círculos são tão onipresentes. Sempre que algum aspecto da natureza não se importa com a direção, os círculos inevitavelmente aparecem. Considere o que acontece quando uma gota de chuva atinge uma poça: pequenas ondulações se expandem a partir do ponto de impacto. Como se espalham igualmente rápido em todas as direções e como começaram em um único ponto, as ondulações*ter* São círculos. A simetria exige isso.

Os círculos também podem dar origem a outras formas curvas. Se imaginarmos um círculo atravessado em seu diâmetro e girando-o em torno desse eixo no espaço tridimensional, o círculo em rotação forma uma esfera, com a forma de um globo ou de uma bola. Quando um círculo é movido verticalmente para a terceira dimensão ao longo de uma linha reta perpendicular ao seu plano, ele forma um cilindro, com a forma de uma lata ou de uma caixa de chapéus. Se ele encolher ao mesmo tempo em que se move verticalmente, forma um cone; se ele se expandir enquanto se move verticalmente, forma um cone truncado (com a forma de um abajur).

Círculos, esferas, cilindros e cones fascinavam os primeiros geômetras, mas eles os consideravam muito mais difíceis de analisar do que triângulos, retângulos, quadrados, cubos e outras formas retilíneas compostas por linhas retas e planos. Eles se perguntavam sobre as áreas de superfícies curvas e os volumes de sólidos curvos, mas não tinham ideia de como resolver tais problemas. A esfericidade os intrigava.

O infinito como construtor de pontes

O cálculo surgiu como um desdobramento da geometria. Por volta de 250 a.C., na Grécia Antiga, era um pequeno e promissor campo da matemática dedicado ao mistério das curvas. O ambicioso plano de seus adeptos era usar o infinito para construir uma ponte entre o curvo e o reto. A esperança era que, uma vez estabelecida essa ligação, os métodos e a tecnologia...

Técnicas de geometria linear poderiam ser transferidas através da ponte e aplicadas ao mistério das curvas. Com a ajuda do infinito, todos os antigos problemas poderiam ser resolvidos. Pelo menos, essa era a proposta.

Na época, esse plano devia parecer bastante improvável. A Infinity tinha uma reputação duvidosa. Era conhecida por ser assustadora, não por ser infinita.

Útil. Pior ainda, era nebuloso e desconcertante. O que era exatamente? Um número? Um lugar? Um conceito?

Contudo, como veremos em breve e nos capítulos seguintes, o infinito acabou se revelando uma dádiva divina. Considerando todas as descobertas e tecnologias que, em última análise, derivaram do cálculo, a ideia de usar o infinito para resolver problemas complexos de geometria certamente figura entre as melhores ideias já tidas.

É claro que nada disso poderia ter sido previsto em 250 a.C. Ainda assim, a teoria do infinito logo deixou algumas marcas impressionantes em seu currículo. Uma de suas primeiras e mais importantes conquistas foi a solução de um enigma antigo: como calcular a área de um círculo.

Uma pizza à prova

Antes de entrar em detalhes, deixe-me esboçar o argumento. A estratégia é reimaginar o círculo como uma pizza. Em seguida, fatiaremos essa pizza em infinitos pedaços e os reorganizaremos magicamente para formar um retângulo. Isso nos dará a resposta que procuramos, já que mover as fatias obviamente não altera sua área original, e sabemos como calcular a área de um retângulo: basta multiplicar sua largura por sua altura. O resultado é uma fórmula para a área de um círculo.

Para efeitos deste argumento, a pizza precisa ser uma pizza matemática idealizada, perfeitamente plana e redonda, com uma crosta infinitesimalmente fina. Sua circunferência, abreviada pela letra*C*A circunferência é a distância ao redor da pizza, medida traçando o contorno da borda. A circunferência não é algo que os amantes de pizza normalmente se preocupam, mas se quiséssemos, poderíamos medi-la.*C*com uma fita métrica.

c eurc em mference *C*

Outra grandeza de interesse é o raio da pizza.*r*, definida como a distância do seu centro a cada ponto da sua crosta. Em particular,*r*Também mede o comprimento do lado reto de uma fatia, assumindo que todas as fatias são iguais e cortadas do centro para a crosta.

r

r

Suponha que comecemos dividindo a torta em quatro partes iguais. Aqui está uma maneira de reorganizá-las, mas não parece muito promissora.

*C/*2

r

r

*C/*2

A nova forma parece bulbosa e estranha, com suas bordas onduladas na parte superior e inferior. Certamente não é um retângulo, então sua área não é fácil de estimar. Parece que estamos regredindo. Mas, como em qualquer drama, o herói precisa se meter em encrenca antes de triunfar. A tensão dramática está aumentando.

Enquanto estivermos presos aqui, porém, devemos observar duas coisas, pois elas se manterão verdadeiras ao longo da demonstração e, em última análise, nos darão as dimensões do retângulo que procuramos. A primeira observação é que metade da crosta se tornou a parte superior curva da nova forma, e a outra metade se tornou a base. Portanto, a parte superior curva tem um comprimento igual à metade da circunferência.*C*2, e o mesmo acontece com a parte inferior, como mostra o diagrama. Esse comprimento eventualmente irá para

transforme-se no lado mais comprido do retângulo, como veremos. Outro detalhe importante é que os lados retos inclinados da forma bulbosa são exatamente os lados das fatias de pizza originais,

portanto, ainda possuem comprimento. r Esse comprimento acabará se tornando o lado menor do retângulo.

O motivo de ainda não vermos nenhum sinal do retângulo desejado é que não cortamos fatias suficientes. Se fizermos oito fatias e as reorganizarmos assim, nossa imagem começará a se parecer mais com um retângulo.

$C/2$

r

Na verdade, a pizza começa a parecer um paralelogramo. Nada mal — pelo menos está quase retilínea. E as ondulações na parte superior e inferior estão bem menos volumosas do que antes. Elas achatavam quando usávamos mais fatias. Como antes, elas têm um comprimento sinuoso. $C2$ na parte superior e inferior e um comprimento lateral inclinado r.

Para deixar a imagem ainda mais interessante, suponhamos que cortamos uma das peças inclinadas da extremidade ao meio longitudinalmente e deslocamos essa metade para o outro lado.

$C/2$

r

Agora o formato se parece muito com um retângulo. É verdade que ainda não está perfeito por causa das ondulações na parte superior e inferior causadas pela curvatura da massa, mas pelo menos estamos progredindo.

Já que cortar mais pedaços parece estar ajudando, vamos continuar fatiando. Com dezesseis fatias e o retoque estético na última fatia, como fizemos antes, obtemos este resultado:

Infinito $7C/2$

r

Quanto mais fatias cortamos, mais achatamos as ondulações

criadas pela crosta. Nossas manobras produzem uma sequência de formas que, magicamente, convergem para um retângulo específico. Como as formas se aproximam cada vez mais desse retângulo, vamos chamá-lo de...*limitando*retângulo.

C/2

r

O objetivo de tudo isso é que podemos facilmente encontrar a área desse retângulo delimitador multiplicando sua largura por sua altura. Tudo o que resta é encontrar essa altura e largura em função das dimensões do círculo. Bem, como as fatias estão na vertical, a altura é simplesmente o raio.$r$do círculo original. E a largura é metade da circunferência do círculo; isso porque metade da circunferência (a borda da pizza) foi usada para fazer a parte superior do retângulo e a outra metade foi usada na parte inferior, assim como aconteceu em todas as etapas intermediárias de trabalho com as formas bulbosas. Portanto, a largura é metade da circunferência.$C2$Em resumo, a área do retângulo delimitador é dada por sua altura vezes sua largura, ou seja,$A=r\times C2=rC2$E como mover as fatias de pizza não alterou a área delas, essa deve ser também a área do círculo original!

Este resultado para a área de um círculo,$A=rC2$, foi provado pela primeira vez (usando um argumento semelhante, mas muito mais cuidadoso) pelo antigo matemático grego Arquimedes (287–212 a.C.) em seu ensaio "Medição de um Círculo".

O aspecto mais inovador da prova é a forma como o infinito veio em nosso auxílio. Quando tínhamos apenas quatro fatias, ou oito, ou

Aos dezesseis anos, o melhor que conseguimos foi reorganizar a pizza em um formato ondulado imperfeito. Depois de um começo pouco promissor, quanto mais fatias tirávamos, mais retangular o formato ficava. Mas isso só aconteceu no limite de*infinitamente*tantas fatias que se tornou verdadeiramente retangular

Angular. Essa é a grande ideia por trás do cálculo. Tudo se torna mais simples no infinito.

Limites e o Enigma da Parede

Um limite é como uma meta inatingível. Você pode se aproximar cada vez mais, mas nunca conseguirá alcançá-lo completamente.

Por exemplo, na demonstração da pizza, conseguimos tornar as formas onduladas cada vez mais próximas de retângulos, cortando fatias suficientes e reorganizando-as. Mas nunca conseguimos torná-las verdadeiramente retangulares. Só conseguíamos nos aproximar desse estado de perfeição. Felizmente, em cálculo, a inatingibilidade do limite geralmente não importa. Muitas vezes, podemos resolver os problemas em que estamos trabalhando fantasiando que podemos realmente alcançar o limite e, em seguida, observando as implicações dessa fantasia. Aliás, muitos dos maiores pioneiros da área fizeram exatamente isso e realizaram grandes descobertas dessa forma. Lógico? Não. Imaginativo? Sim. Bem-sucedido? Com certeza.

Um limite é um conceito sutil, mas central no cálculo. É elusivo porque não é uma ideia comum no dia a dia. Talvez a analogia mais próxima seja o Enigma da Parede. Se você caminhar até a metade do caminho até a parede, e depois caminhar metade da distância restante, e depois metade dessa metade, e assim por diante, haverá algum dia um degrau quando você finalmente chegar à parede?

A resposta é claramente não, porque o Enigma da Parede estipula que, a cada passo, você caminha até a metade do caminho até a parede, não até o final. Depois de dar dez passos, um milhão ou qualquer outro número de passos, sempre haverá um espaço entre você e a parede. Mas, igualmente claro, você pode chegar arbitrariamente perto da parede. Isso significa que, dando passos suficientes, você pode chegar a um centímetro, um milímetro, um nanômetro ou qualquer outra distância minúscula, mas diferente de zero, dela, mas você nunca conseguirá chegar até lá completamente. Aqui, a parede desempenha o papel de limite. Levou cerca de dois mil anos para que o conceito de limite fosse rigorosamente definido. Até então, os pioneiros do cálculo se viravam muito bem

com a intuição. Portanto, não se preocupe se os limites parecerem vagos por enquanto. Nós os conheceremos melhor observando-os em ação. De uma perspectiva moderna, eles importam porque são a base sobre a qual todo o cálculo é construído.

Se a metáfora da parede parece muito sombria e desumana (quem quer se aproximar de uma parede?), tente esta analogia: tudo que se aproxima de um limite é como um herói envolvido em uma busca sem fim. Não é um exercício de futilidade total, como a tarefa impossível enfrentada por Sísifo, condenado a rolar uma pedra morro acima apenas para vê-la rolar de volta para baixo repetidamente pela eternidade. Em vez disso, quando um processo matemático avança em direção a um limite (como as formas recortadas convergindo para o retângulo que o limita), é como se um protagonista estivesse se esforçando por algo que sabe ser impossível, mas para o qual ainda mantém a esperança de sucesso, encorajado pelo progresso constante que faz enquanto tenta alcançar uma estrela inalcançável.

A Parábola de .333 . . .

Para reforçar as grandes ideias de que tudo se torna mais simples no infinito e que os limites são como objetivos inatingíveis, considere o seguinte exemplo de aritmética. Trata-se do problema de converter uma fração — por exemplo, 1/3 — em um decimal equivalente (neste caso, 1/3 = 0,333...). Lembro-me vividamente de quando minha professora de matemática da oitava série, a Sra. Stanton, nos ensinou como fazer isso. Foi memorável porque ela, de repente, começou a falar sobre o infinito.

Até aquele momento, eu nunca tinha ouvido um adulto mencionar o infinito. Meus pais certamente não davam importância a ele. Parecia um segredo que só as crianças conheciam. No parquinho, era o assunto do momento, em provocações e competições para ver quem era melhor.

"Você é um idiota!"
"É, bem, você é um idiota duas vezes!"
"E você é um idiota ao infinito!"
"E você é um idiota infinitamente pior!"
"Isso é a mesma coisa que infinito, seu idiota!"

Aquelas sessões esclarecedoras me convenceram de que o infinito não se comportava como um número comum. Ele não aumentava quando se adicionava um a ele. Nem mesmo adicionar o infinito a ele adiantava. Suas invencíveis propriedades de empate o tornavam ótimo para encerrar discussões no pátio da escola. Quem o usasse primeiro, venceria.

Mas nenhum professor jamais havia falado sobre infinito até a Sra. Stanton mencionar o assunto naquele dia. Todos na nossa turma já conheciam os decimais finitos, aqueles usados para representar quantias em dinheiro, como R$ 10,28, com seus dois dígitos após a vírgula. Em comparação, os decimais infinitos, que tinham infinitos dígitos após a vírgula, pareceram estranhos a princípio, mas se tornaram naturais assim que começamos a discutir frações.

Aprendemos que a fração 1/3 podia ser escrita como 0,333... onde os pontos indicavam que os três se repetiam indefinidamente. Isso fazia sentido para mim, porque quando tentei calcular 1/3 usando o algoritmo da divisão longa, me vi preso em um ciclo infinito: três não cabe em um, então finjo que o um é dez; então três cabe em dez três vezes, o que deixa um resto de um; e agora estou de volta ao ponto de partida, ainda tentando dividir três por um. Não havia como sair do ciclo. É por isso que os três continuavam se repetindo em 0,333...

Os três pontos no final de 0,333... têm duas interpretações. A interpretação mais simples é que existem infinitos números 3 lado a lado à direita da vírgula decimal. Claro que não podemos escrevê-los todos, já que são infinitos.

Mas, ao escrevermos os três pontos, indicamos que eles estão todos lá, pelo menos em nossas mentes. Chamarei isso de*infinito completo*interpretação. A vantagem dessa interpretação é que ela parece fácil e intuitiva, desde que não estejamos dispostos a pensar muito sobre o que significa infinito.

A interpretação mais sofisticada é que 0,333... representa um limite, assim como o retângulo delimitador representa as formas recortadas na demonstração da pizza ou como a parede representa o pedestre azarado. Só que aqui, 0,333... representa o limite dos decimais sucessivos que geramos ao realizar a divisão longa da fração 1/3. À medida que o processo de divisão continua por mais

e mais etapas, ele gera mais e mais 3s na expansão decimal de 1/3. Ao persistir, podemos produzir uma aproximação tão próxima de 1/3 quanto desejarmos. Se não estivermos satisfeitos com 1/3 ≈ 0,3, podemos sempre dar um passo adiante para 1/3 ≈ 0,33, e assim por diante. Chamarei isso de...*potencial infinito*interpretação. É "potencial" no sentido de que as aproximações podem potencialmente continuar indefinidamente. Nada nos impede de prosseguir por um milhão, um bilhão ou qualquer outro número de passos. A vantagem dessa interpretação é que nunca precisamos recorrer a noções vagas como infinito. Podemos nos ater ao finito.

Para trabalhar com equações como 1/3 = 0,333..., não importa muito qual perspectiva adotemos. Ambas são igualmente válidas e produzem os mesmos resultados matemáticos em qualquer cálculo que realizemos. Mas existem outras situações na matemática em que a interpretação do infinito absoluto pode causar um caos lógico. Era a isso que me referia na introdução quando mencionei o espectro do golem do infinito. Às vezes, realmente faz diferença como pensamos sobre os resultados de um processo que se aproxima de um limite. Fingir que o processo realmente termina e que de alguma forma atinge o nirvana do infinito pode, ocasionalmente, nos colocar em apuros.

A Parábola do Polígono Infinito

Como exemplo para ilustrar, imagine que colocamos um certo número de pontos em um círculo, espaçando-os uniformemente e conectando-os uns aos outros com linhas retas. Com três pontos, obtemos um triângulo equilátero; com

Com quatro, um quadrado; com cinco, um pentágono; e assim por diante, percorrendo uma sequência de formas retilíneas chamadas polígonos regulares.

Observe que, quanto mais pontos usamos, mais arredondados os polígonos se tornam e mais próximos ficam do círculo. Ao mesmo tempo, seus lados ficam mais curtos e em maior número. Conforme avançamos progressivamente na sequência, os polígonos se aproximam do círculo original como um limite.

Dessa forma, o infinito está novamente unindo dois mundos. Desta vez, ele nos leva do retilíneo ao circular, de polígonos com cantos agudos a círculos perfeitamente suaves, enquanto que, na prova da pizza, o infinito nos levou do circular ao retilíneo ao transformar um círculo em um retângulo.

É claro que, em qualquer estágio finito, um polígono continua sendo apenas um polígono. Ele ainda não é um círculo e nunca se torna um. Ele se aproxima cada vez mais de ser um círculo, mas nunca chega a ser um. Estamos lidando aqui com o infinito potencial, não com o infinito completo. Portanto, tudo é perfeitamente aceitável do ponto de vista do rigor lógico.

Mas e se pudéssemos ir até o infinito absoluto? O polígono infinito resultante, com lados infinitesimalmente curtos, seria realmente infinito?*ser* Um círculo? É tentador pensar assim, porque então o polígono seria liso. Todos os seus cantos seriam arredondados. Tudo se tornaria perfeito e belo.

O fascínio e o perigo do infinito

Há uma lição geral aqui: os limites costumam ser mais simples do que as aproximações que os definem. Um círculo é mais simples e elegante do que qualquer um dos polígonos complexos que se

aproximam dele. O mesmo se aplica à demonstração da pizza, onde o retângulo que representa o limite era mais simples e elegante do que as formas recortadas, com suas protuberâncias e pontas desagradáveis. E o mesmo vale para a fração 1/3. Ela era mais simples e elegante do que qualquer uma das frações desajeitadas que se aproximavam dela, com seus numeradores e denominadores grandes e feios, como 3/10, 33/100 e 333/1000. Em todos esses casos, a forma ou o número que representa o limite era mais simples.

e mais simétrico do que seus aproximadores finitos. Esse é o fascínio do infinito. Tudo se torna melhor lá. Com essa lição em mente, voltemos à parábola do infinito.

polígono finito. Deveríamos arriscar e dizer que um círculo verdadeiramente*é* Um polígono com infinitos lados infinitesimais? Não. Não devemos fazer isso, não devemos ceder a essa tentação. Fazer isso seria cometer o pecado da infinitude completa. Isso nos condenaria ao inferno lógico.

Para entender o porquê, suponhamos, por um instante, que consideremos a possibilidade de um círculo ser, de fato, um polígono infinito com lados infinitesimais. Qual o comprimento exato desses lados? Comprimento zero? Se sim, então infinito vezes zero — o comprimento total de todos esses lados — deve ser igual à circunferência do círculo. Mas agora imagine um círculo com o dobro da circunferência. Infinito vezes zero também teria que ser igual a essa circunferência maior. Portanto, infinito vezes zero teria que ser tanto a circunferência quanto o dobro da circunferência. Que absurdo! Simplesmente não há uma maneira consistente de definir infinito vezes zero e, portanto, não há uma maneira sensata de considerar um círculo como um polígono infinito.

No entanto, há algo de muito atraente nessa intuição. Assim como o pecado original bíblico, o pecado original do cálculo — a tentação de tratar um círculo como um polígono infinito com lados infinitesimalmente curtos — é muito difícil de resistir, e pela mesma razão. Ele nos tenta com a perspectiva de um conhecimento proibido, com insights.

inacessível por meios comuns. Durante milhares de anos, os geômetras se esforçaram para descobrir a circunferência de um círculo. Se ao menos um círculo pudesse ser substituído por um polígono formado por muitos lados retos minúsculos, o problema seria muito mais fácil.

Ao ouvir o sussurro dessa serpente — mas contendo-se o suficiente, usando o infinito potencial em vez do infinito completo, mais tentador — os matemáticos aprenderam a resolver o problema da circunferência e outros mistérios das curvas. Nos próximos capítulos, veremos como eles fizeram isso. Mas primeiro, precisamos compreender ainda mais profundamente o quão perigoso o infinito completo pode ser. É um pecado que abre caminho para muitos outros, incluindo o pecado sobre o qual nossos professores nos alertaram primeiro.

O Pecado de Dividir por Zero

Em todo o mundo, os alunos aprendem que a divisão por zero é proibida. Deveriam ficar chocados com a existência de tal tabu. Os números deveriam ser ordenados e comportados. A aula de matemática é um espaço para lógica e raciocínio. No entanto, é possível fazer coisas simples com números que simplesmente não funcionam ou não fazem sentido. Dividir por zero é uma delas.

A raiz do problema é o infinito. Dividir por zero evoca o infinito de maneira muito semelhante à forma como um tabuleiro Ouija supostamente invoca espíritos de outro reino. É arriscado. Não se aventure por esse caminho.

Para aqueles que não resistem à tentação e querem entender por que o infinito espreita nas sombras, imaginem dividir 6 por um número pequeno, próximo de zero, mas não exatamente zero, digamos algo como 0,1. Não há nada de tabu nisso. O resultado de 6 dividido por 0,1 é 60, um número considerável. Divida 6 por um número ainda menor.

Se dividirmos 6 por um número muito mais próximo de zero, digamos 0,01, o resultado aumenta; agora é 600. Se ousarmos dividir 6 por um número muito mais próximo de zero, digamos 0,0000001, o resultado fica muito maior; em vez de 60 ou 600, agora é 60.000.000. A tendência é clara. Quanto menor o divisor, maior o resultado. No limite, quando o divisor se aproxima de zero, o resultado se aproxima de √6.

finitude. Essa é a verdadeira razão pela qual não podemos dividir por zero. Os mais pessimistas dizem que a resposta é indefinida, mas a verdade é que ela é infinita.

Tudo isso pode ser visualizado da seguinte maneira. Imagine

dividir uma linha de cronômetro de 6 centavos em pedaços de 0,1 centímetro cada. Esses 60 pedaços, colocados em sequência, formam a linha original.

0,1

Da mesma forma (mas não vou tentar esboçar isso), essa mesma linha pode ser dividida em 600 pedaços de 0,01 centímetro cada ou em 60.000.000 pedaços de 0,0000001 centímetro cada.

Se continuarmos e levarmos essa frenética poda ao limite, chegaremos à conclusão bizarra de que uma linha de 6 centímetros é composta por*infinitamente*muitos pedaços de comprimento*zero*Talvez isso pareça plausível. Afinal, a linha é composta por infinitos pontos, e cada ponto tem comprimento zero.

Mas o que é filosoficamente perturbador é que o mesmo argumento se aplica a uma linha de*qualquer* comprimento. Na verdade, não há nada de especial no número 6. Poderíamos igualmente afirmar que uma linha de 3 centímetros de comprimento, ou 49,57, ou 2.000.000.000, é composta por infinitos pontos de comprimento zero. Evidentemente, multiplicar zero por infinito pode nos dar qualquer resultado concebível — 6, 3, 49,57 ou 2.000.000.000. Isso é assustador, matematicamente falando.

O Pecado da Infinitude Consumada

A transgressão que nos arrastou para esta confusão foi fingir que realmente podíamos*alcançar* O limite, que poderíamos tratar o infinito como um número alcançável. Já no século IV a.C., o filósofo grego Aristóteles alertou que pecar com o infinito dessa maneira poderia levar a todo tipo de problema lógico. Ele se insurgiu contra o que chamou de infinito completo e argumentou que apenas o infinito potencial fazia sentido.

No contexto de dividir uma linha em pedaços, o infinito

potencial significaria que a linha poderia ser dividida em cada vez mais pedaços, tantos quantos fossem desejados, mas sempre em um número finito e todos de comprimento diferente de zero. Isso é perfeitamente permitido e não acarreta dificuldades lógicas.

O que é proibido é imaginar chegar a uma infinidade completa de partes de comprimento zero. Aristóteles acreditava que isso levaria a um absurdo — como acontece aqui, ao revelar que zero vezes infinito pode dar qualquer resposta. E assim ele proibiu o uso da ideia de infinito completo na matemática e na filosofia. Seu decreto foi mantido por matemáticos.
cianos pelos próximos dois mil e duzentos anos.

Em algum lugar nos recônditos obscuros da pré-história, alguém percebeu que os números nunca acabam. E com esse pensamento, nasceu o infinito. É a contraparte numérica de algo profundo em nossa psique, em nossos pesadelos de abismos sem fundo e em nossas esperanças de vida eterna. O infinito está no cerne de muitos de nossos sonhos, medos e perguntas sem resposta: Qual o tamanho do universo? Quanto tempo dura a eternidade? Qual o poder de Deus? Em todos os ramos do pensamento humano, da religião e filosofia à ciência e matemática, o infinito tem intrigado as mentes mais brilhantes do mundo por milhares de anos. Foi banido, proibido e evitado. Sempre foi uma ideia perigosa. Durante a Inquisição, o monge renegado Giordano Bruno foi queimado vivo na fogueira por sugerir que Deus, em seu poder infinito, criou inúmeros mundos.

Os paradoxos de Zenão

Cerca de dois milênios antes da execução de Giordano Bruno, outro filósofo corajoso ousou contemplar o infinito. Zenão de Eleia (c. 490–430 a.C.) propôs uma série de paradoxos sobre espaço, tempo e movimento, nos quais o infinito desempenhava um papel fundamental e intrigante. Esses enigmas anteciparam ideias centrais do cálculo e ainda são debatidos hoje. Bertrand Russell os descreveu como imensamente sutis e profundos.

Não temos certeza do que Zenão tentava provar com seus paradoxos, pois nenhum de seus escritos sobreviveu, se é que algum chegou a existir.

Seus argumentos chegaram até nós por meio de Platão e Aris Totle, que os resumiram principalmente para refutá-los. Em sua narrativa,

Zenão tentava provar que a mudança é impossível. Nossos sentidos nos dizem o contrário, mas eles nos enganam. A mudança, segundo Zenão, é uma ilusão.

Três dos paradoxos de Zenão são particularmente famosos e impactantes. O primeiro deles, o Paradoxo da Dicotomia, é semelhante ao Enigma da Parede, mas muito mais frustrante. Ele afirma que você nunca pode se mover porque, antes de dar um único passo, precisa dar meio passo. E antes de dar esse, precisa dar um quarto de passo, e assim por diante. Portanto, você não só não consegue chegar à parede, como também não consegue nem começar a andar.

É um paradoxo brilhante. Quem diria que dar um passo exigiria a conclusão de infinitas subtarefas? Pior ainda, não há*primeiro* tarefa a ser concluída. A primeira tarefa não pode ser dar meio passo, porque antes disso você teria que completar um quarto de passo, e antes disso, um oitavo de passo, e assim por diante. Se você achava que tinha muito o que fazer antes do café da manhã, imagine ter que terminar um número infinito de tarefas só para chegar à cozinha.

Outro paradoxo, conhecido como o de Aquiles e a Tartaruga, afirma que um corredor veloz (Aquiles) jamais conseguirá alcançar um corredor lento (a tartaruga) se este último tiver recebido uma vantagem inicial na corrida.

Pois, quando Aquiles chegar ao ponto de partida da tartaruga, esta já terá percorrido um pouco mais o caminho. E quando Aquiles chegar a esse novo ponto, a tartaruga terá avançado um pouco mais. Já que todos acreditamos que um corredor veloz*pode*

Se conseguirmos ultrapassar um corredor lento, ou nossos sentidos estão nos enganando, ou há algo errado na maneira como raciocinamos sobre movimento, espaço e tempo.

Nesses dois primeiros paradoxos, Zenão parecia argumentar contra a ideia de que o espaço e o tempo são fundamentalmente contínuos, ou seja, que podem ser divididos infinitamente. Sua engenhosa estratégia retórica (alguns dizem que ele a inventou) era a prova por contradição, conhecida por advogados e lógicos.
cianos como*redução ao absurdo*, redução ao absurdo. Em ambos os paradoxos, Zenão assumiu a continuidade do espaço e do tempo e, em seguida, deduziu uma contradição dessa suposição; portanto, a suposição de continuidade deve ser falsa. O cálculo se fundamenta nessa mesma suposição e, por isso, tem muito a perder nessa disputa. Ele refuta Zenão mostrando onde seu raciocínio falhou.

Por exemplo, veja como o cálculo resolve o dilema de Aquiles e a tartaruga. Suponha que a tartaruga comece 10 metros à frente de Aquiles, mas Aquiles corre 10 vezes mais rápido, digamos, a uma velocidade de 10 metros por segundo, em comparação com o 1 metro por segundo da tartaruga. Então, Aquiles leva 1 segundo para recuperar a vantagem inicial de 10 metros da tartaruga. Durante esse tempo, a tartaruga terá se movido 1 metro a mais. Aquiles leva mais 0,1 segundo para recuperar essa diferença, momento em que a tartaruga terá se movido mais 0,1 metro. Continuando esse raciocínio, vemos que os tempos consecutivos de recuperação de Aquiles somam uma série infinita.

$$1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \cdots = 1{,}111\ldots \text{ segundos.}$$

Reescrevendo como uma fração equivalente, esse tempo é igual a 10/9 segundos. Esse é o tempo que Aquiles leva para alcançar o tor toise e ultrapassá-lo. E embora Zenão estivesse certo ao afirmar que Aquiles tem infinitas tarefas a cumprir, não há nada de paradoxal nisso. Como os cálculos demonstram, ele pode realizá-las todas em um tempo finito.

Essa linha de raciocínio se qualifica como um argumento de cálculo. Acabamos de somar uma série infinita e calcular um limite, como fizemos anteriormente quando discutimos por que 0,333... = 1/3. Sempre que trabalhamos com

Com decimais infinitos, estamos fazendo cálculo (embora a maioria das pessoas desdenhe disso, considerando-o aritmética do ensino fundamental).

Aliás, o cálculo não é a única maneira de resolver esse

problema. Poderíamos usar álgebra. Para isso, primeiro precisamos descobrir onde cada corredor está na pista em um instante qualquer.$t$segundos após o início da corrida. Como Aquiles corre a uma velocidade de 10 metros por segundo e como a distância é igual à velocidade vezes o tempo, a distância percorrida por ele na pista é de 10tQuanto à tartaruga, ela tinha uma vantagem inicial de 10 metros e corre a uma velocidade de 1 metro por segundo, portanto, a distância percorrida na pista é de 10 +tPara determinar o momento em que Aquiles alcança a tartaruga, precisamos igualar essas duas expressões, pois essa é a maneira algébrica de perguntar quando Aquiles e a tartaruga...
toise estão no mesmo lugar ao mesmo tempo. A equação

resultante é $10t = 10 + t$.

Para resolver esta equação, subtraia$t$de ambos os lados. Isso dá $9.t = 10$. Em seguida, divida ambos os lados por 9. O resultado,$t = 10/9$ segundos, é o mesmo que encontramos com decimais infinitos.

Portanto, da perspectiva do cálculo, não há realmente nenhum paradoxo em Aquiles e a tartaruga. Se o espaço e o tempo são contínuos, tudo se resolve perfeitamente.

Zeno entra no mundo digital

Em um terceiro paradoxo, o Paradoxo da Flecha, Zenão argumentou contra uma possibilidade alternativa: a de que o espaço e o tempo são fundamentalmente discretos, ou seja, compostos de minúsculas unidades indivisíveis, algo como pixels de espaço e tempo. O paradoxo é o seguinte: se o espaço e o tempo são discretos, uma flecha em voo nunca pode se mover, porque a cada instante (um pixel de tempo) a flecha está em um lugar definido (um conjunto específico de pixels no espaço). Portanto, em qualquer instante dado, a flecha não está se movendo. Ela também não se move entre instantes porque, por hipótese, não há um movimento entre eles.*é* Não há intervalo de tempo entre os instantes. Portanto, a flecha nunca está em movimento.

Na minha opinião, este é o mais sutil e interessante dos parágrafos. Filósofos ainda debatem seu status, mas parece-me que Zenão acertou em dois terços. Num mundo onde espaço e tempo são

distintos, uma flecha em voo.*seria* Comportar-se-ia como Zenão disse. Estranhamente, materializar-se-ia em um lugar após o outro à medida que o tempo avançasse em passos discretos. E ele também estava certo ao dizer que nossos sentidos nos indicam que o mundo real não é assim, pelo menos não como o percebemos normalmente.

Mas Zenão estava errado ao afirmar que o movimento seria impossível em um mundo assim. Todos sabemos disso por experiência própria ao assistir filmes e vídeos em nossos dispositivos digitais. Nossos celulares, gravadores de vídeo digital (DVRs) e telas de computador fragmentam tudo em pixels discretos e, ainda assim, ao contrário do que Zenão afirmava, o movimento pode ocorrer perfeitamente bem nessas paisagens discretizadas. Contanto que tudo esteja suficientemente fragmentado, não conseguimos distinguir entre um movimento fluido e sua representação digital. Se assistíssemos a um vídeo em alta resolução de uma flecha em voo, na verdade estaríamos vendo a flecha pixelizada.
se movendo em um quadro discreto após o outro. Mas, devido às nossas limitações perceptivas, pareceria uma trajetória suave. Às vezes, nossos sentidos realmente nos enganam.

É claro que, se o corte ficar muito irregular, nós...*pode* A diferença entre o contínuo e o discreto é algo que muitas vezes nos incomoda. Considere a diferença entre um relógio analógico antigo e uma monstruosidade digital/mecânica moderna. No relógio analógico, o ponteiro dos segundos descreve um movimento perfeitamente uniforme, representando o tempo como algo que flui. Já no relógio digital, o ponteiro dos segundos avança aos solavancos, em passos discretos.*estalo, estalo, estalo*Representa o tempo como se estivesse saltando.

O infinito pode construir uma ponte entre essas duas concepções muito diferentes de tempo. Imagine um relógio digital que avança por meio de trilhões de pequenos cliques por segundo, em vez de um único clique alto.*paulada*Não seríamos mais capazes de distinguir entre esse tipo de relógio digital e um verdadeiro relógio analógico. O mesmo acontece com filmes e vídeos.
eos; contanto que os quadros passem rápido o suficiente, digamos a trinta quadros por segundo, eles dão a impressão de fluxo contínuo. E se houvesse*infinitamente*Com muitos quadros por segundo, o fluxo seria verdadeiramente perfeito. Considere como a música é gravada e reproduzida. Meu filho mais jovem...

Minha filha ganhou recentemente um toca-discos Victrola antigo de presente de aniversário de quinze anos. Agora ela pode ouvir Ella Fitzgerald em vinil. É uma experiência analógica por excelência. Todas as notas e improvisações vocais de Ella soam tão suaves quanto quando ela as cantava; o volume varia continuamente de suave a alto, e em todos os tons intermediários, e a afinação sobe graciosamente de grave a agudo. Já quando a ouvimos em formato digital, cada aspecto de sua música é fragmentado em pequenos passos discretos e convertido em sequências de 0s e 1s. Embora conceitualmente as diferenças sejam gigantescas, nossos ouvidos não conseguem percebê-las.

Assim, na vida cotidiana, o abismo entre o discreto e o contínuo pode muitas vezes ser transposto, pelo menos com boa aproximação. Para muitos fins práticos, o discreto pode substituir o contínuo, desde que o segmentemos em partes suficientemente finas. No mundo ideal do cálculo, podemos ir além. Tudo o que é contínuo pode ser segmentado.*exatamente* (não apenas aproximadamente) em infinitas partes infinitesimais. Esse é o Princípio do Infinito. Com limites e infinito, o discreto e o contínuo se tornam um só.

Zeno Encontra o Quântico

O Princípio do Infinito nos pede para imaginar que tudo pode ser fatiado e cortado infinitamente. Já vimos como esses conceitos podem ser úteis. Imaginar pizzas que podem ser cortadas em fatias arbitrariamente finas nos permitiu calcular a área de um círculo com precisão. A pergunta que surge naturalmente é: será que coisas tão infinitesimalmente pequenas existem no mundo real?

A mecânica quântica tem algo a dizer sobre isso. É o ramo da física moderna que descreve como a natureza se comporta em suas menores escalas. É a teoria física mais precisa já concebida e é lendária por sua estranheza. Sua terminologia, com seu zoológico de léptons, quarks e neutrinos, parece algo saído de um livro de Lewis Carroll. O comportamento que ela descreve também costuma ser estranho. Na escala atômica, podem acontecer coisas que jamais ocorreriam no mundo macroscópico.

Por exemplo, considere o Enigma da Parede de uma perspectiva quântica. Se o caminhante fosse um elétron, haveria uma chance de que ele pudesse...

atravessar a parede. Esse efeito é conhecido como tunelamento quântico. Ele realmente acontece. É difícil entendê-lo em termos clássicos, mas a explicação quântica é que os elétrons são descritos por ondas de probabilidade. Essas ondas obedecem a uma equação formulada em 1925 pelo físico austríaco Erwin Schrödinger. A solução da equação de Schrödinger mostra que uma pequena porção da onda de probabilidade do elétron existe do outro lado de uma barreira impenetrável. Isso significa que existe uma probabilidade pequena, mas não nula, de que o elétron seja detectado do outro lado da barreira, como se tivesse tunelado através da parede. Com a ajuda do cálculo diferencial e integral, podemos calcular...
A taxa na qual esses eventos de tunelamento ocorrem foi determinada com base em experimentos que confirmaram as previsões. O tunelamento é real. Partículas alfa tunelam para fora dos núcleos de urânio na taxa prevista, produzindo o efeito conhecido como radioatividade. O tunelamento também desempenha um papel importante nos processos de fusão nuclear que fazem o Sol brilhar, portanto, a vida na Terra depende parcialmente do tunelamento. E ele possui muitas tecnologias.
O cálculo usa técnicas como a microscopia de tunelamento de varredura, que permite aos cientistas visualizar e manipular átomos individuais, e se baseia nesse conceito. Não temos intuição para tais eventos em escala atômica, sendo nós criaturas gigantescas compostas por trilhões e trilhões de átomos. Felizmente, o cálculo pode substituir a intuição. Aplicando o cálculo e a mecânica quântica, os físicos abriram uma janela teórica para o micromundo. Os frutos de suas descobertas incluem lasers e transistores, os chips em nossos computadores e os LEDs em nossas TVs de tela plana.

Embora a mecânica quântica seja conceitualmente radical em muitos aspectos, na formulação de Schrödinger, ela mantém a suposição tradicional de que o espaço e o tempo são contínuos. Maxwell fez a mesma suposição em sua teoria da eletricidade e do magnetismo; assim como Newton em sua teoria da gravidade e Einstein em sua teoria da relatividade. Todo o cálculo, e consequentemente toda a física teórica, depende dessa suposição de espaço e tempo contínuos. Essa suposição de continuidade tem se mostrado extremamente bem-sucedida até o momento.

Mas há razões para acreditar que, em escalas muito, muito menores do universo, muito abaixo da escala atômica, o espaço e o

tempo podem, em última análise, perder seu caráter contínuo. Não sabemos ao certo.

Não sabemos ao certo como é lá embaixo, mas podemos imaginar. O espaço e o tempo poderiam se tornar tão nitidamente pixelizados quanto Zenão imaginou em seu Paradoxo da Flecha, mas é mais provável que se degenerem em uma bagunça desordenada devido à incerteza quântica. Em escalas tão pequenas, o espaço e o tempo poderiam fervilhar e agitar-se aleatoriamente. Poderiam flutuar como espuma borbulhante.

Embora não haja consenso sobre como visualizar o espaço e o tempo nessas escalas extremas, existe um acordo universal sobre quão pequenas essas escalas provavelmente são. Elas nos são impostas por três constantes fundamentais da natureza. Uma delas é a constante gravitacional,*G*Ela mede a força da gravidade no universo. Surgiu pela primeira vez na teoria da gravidade de Newton e novamente na teoria da relatividade geral de Einstein. Certamente ocorrerá em qualquer teoria futura que as substitua. A segunda constante,$\hbar$(pronuncia-se “h bar”), reflete a intensidade dos efeitos quânticos. Aparece, por exemplo, no princípio da incerteza de Heisenberg e na equação de onda de Schrödinger da mecânica quântica. A terceira constante é a velocidade da luz.*c*É o limite de velocidade do universo. Nenhum sinal de qualquer tipo pode viajar mais rápido que isso.*c*Essa velocidade deve necessariamente entrar em qualquer teoria do espaço e do tempo, pois os une através do princípio de que distância é igual a velocidade vezes tempo, onde*c*desempenha o papel de taxa ou velocidade.

Em 1899, o pai da teoria quântica, um físico alemão chamado Max Planck, percebeu que havia apenas uma maneira de combinar essas constantes fundamentais para produzir uma escala de comprimento. Esse comprimento único, concluiu ele, era uma medida natural para o universo. Em sua homenagem, agora é chamado de comprimento de Planck. Ele é dado pela combinação algébrica

$$\text{Comprimento de Planck} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}.$$

Quando inserimos os valores medidos de*G*,$\hbar$, e *c*, o comprimento de Planck resulta em cerca de 10^{-35} metros, uma distância

estupendamente pequena, cerca de cem milhões de trilhões de vezes menor que o diâmetro de um próton. O tempo de Planck correspondente é o tempo que a luz levaria para percorrer essa distância, que é de cerca de 10^{-43}

segundos. Espaço e tempo não fariam mais sentido abaixo dessas escalas. Elas representam o fim da linha.

Esses números impõem um limite à precisão com que poderíamos analisar o espaço ou o tempo. Para ter uma ideia do nível de precisão de que estamos falando, considere quantos dígitos precisaríamos para fazer uma das comparações mais extremas imagináveis. Pegue a maior posição possível.
A distância sível, o diâmetro estimado do universo conhecido, e dividida pela menor distância possível, o comprimento de Planck. Essa proporção de distâncias, insondavelmente extrema, é um número com apenas sessenta dígitos. Quero enfatizar isso—*apenas* Sessenta dígitos. Esse é o máximo que precisaríamos para expressar uma distância em função de outra. Nós
Adicionar mais dígitos do que isso — digamos, cem dígitos, quanto mais infinitos — seria um exagero colossal.*caminho* mais do que jamais precisaríamos para descrever quaisquer distâncias reais no mundo material.

No entanto, em cálculo, usamos infinitos dígitos o tempo todo. Já no ensino fundamental, os alunos são solicitados a pensar em números como 0,333... cuja expansão decimal continua infinitamente. Chamamos esses números de reais, mas não há nada de real neles. A necessidade de especificar um número real por meio de um número infinito de dígitos após a vírgula decimal é exatamente o que significa ser real.*não* Real, pelo menos na medida em que entendemos a realidade através da física atual.

Se os números reais não são reais, por que os matemáticos os adoram tanto? E por que os alunos são obrigados a aprendê-los? Porque o cálculo precisa deles. Desde o início, o cálculo insiste teimosamente que tudo — espaço e tempo, matéria e energia, todos os objetos que já existiram ou existirão — deve ser real.
considerada contínua. Consequentemente, tudo pode e deve ser quantificado por números reais. Nesse mundo idealizado e imaginário, fingimos que tudo pode ser dividido em partes cada vez menores, indefinidamente. Toda a teoria do cálculo é construída sobre essa premissa. Sem ela, não poderíamos calcular limites e,

sem limites, o cálculo entraria em colapso. Se usássemos apenas decimais com sessenta dígitos de precisão, a reta numérica seria repleta de buracos e crateras. Haveria lacunas onde pi, a raiz quadrada de dois, e quaisquer outros números que necessitem de infinitos dígitos após a vírgula deveriam estar. Até mesmo uma fração simples como 1/3 seria incompleta.

porque também requer um número infinito de dígitos (0,333...) para determinar sua posição na reta numérica. Se quisermos pensar na totalidade de todos os números como formando uma linha contínua, esses números precisam ser números reais. Eles podem ser uma aproximação da realidade, mas funcionam surpreendentemente bem. A realidade é complexa demais para ser modelada de qualquer outra forma. Com decimais infinitos, assim como no restante do cálculo, o infinito simplifica tudo.

2

O Homem Que Infinito Aproveitado

Cerca de duzentos anos depois de Zenão ter refletido sobre a natureza do espaço, do tempo, do movimento e do infinito, outro pensador considerou o infinito irresistível. Seu nome era Arquimedes. Já o conhecemos em relação à área de um círculo, mas ele é lendário por muitas outras razões.

Para começar, existem muitas histórias engraçadas sobre ele. Várias o retratam como o gênio da matemática original. Por exemplo, o historiador Plutarco nos conta que Arquimedes podia ficar tão absorto em geometria que isso o fazia "esquecer de comer e negligenciar a própria higiene". (Isso certamente parece verídico. Para muitos de nós, matemáticos, refeições e higiene pessoal não são prioridades.) Plutarco continua dizendo que, quando Arquimedes estava perdido em seus estudos matemáticos, ele precisava ser "carregado à força para tomar banho". É interessante que ele fosse tão relutante em tomar banho, visto que o banho é o

cenário da história mais conhecida sobre ele. De acordo com o romano, Arquimedes era um homem que se recusava a tomar banho.

O arquiteto Vitrúvio contou que Arquimedes ficou tão entusiasmado com uma súbita ideia que teve no banho que saltou da banheira e correu nu pela rua gritando: "Eureka!" ("Encontrei!").

Outras histórias o retratam como um mágico militar, um guerreiro-cientista/um esquadrão da morte de um homem só. Segundo essas lendas, quando sua cidade natal, Siracusa, estava sitiada pelos romanos em 212 a.C., Arquimedes — então um homem idoso, com cerca de setenta anos — ajudou a defender a cidade usando seu conhecimento de polias e alavancas para criar mecanismos fantásticos.

armas, "máquinas de guerra" como ganchos e guindastes gigantes que podiam erguer os navios romanos do mar e sacudir suas velas como se fossem areia sendo sacudida de um sapato. Como Plutarco descreveu a cena aterradora: "Um navio era frequentemente erguido a uma grande altura no ar (uma coisa terrível de se ver), e era balançado de um lado para o outro, até que todos os marinheiros fossem lançados ao mar,
quando finalmente se atirou contra as rochas, ou caiu." Em um tom mais sério, todos os estudantes de ciências e engenharia se lembram de Arquimedes por seu princípio da flutuabilidade (um corpo imerso em um fluido é impulsionado para cima por uma força igual ao peso do fluido deslocado) e sua lei da alavanca (objetos pesados colocados em lados opostos de uma alavanca se equilibrarão se, e somente se, seus pesos forem inversamente proporcionais às suas distâncias do fulcro). Ambas as ideias têm inúmeras aplicações práticas. O princípio da flutuabilidade de Arquimedes explica por que alguns objetos flutuam e outros não. Ele também fundamenta toda a arquitetura naval, a teoria da estabilidade de navios e o projeto de plataformas de perfuração de petróleo no mar. E você se baseia na lei da alavanca, mesmo que inconscientemente, toda vez que usa um cortador de unhas ou um pé de cabra.

Arquimedes pode ter sido um formidável fabricante de máquinas de guerra, e sem dúvida foi um cientista e engenheiro brilhante, mas o que realmente o coloca no panteão é o que ele fez pela matemática. Ele abriu caminho para o cálculo integral. Suas ideias mais profundas são claramente visíveis em sua obra, mas não são vistas novamente por quase dois milênios. Dizer que ele estava

à frente de seu tempo seria um eufemismo. Alguém já...*mais* à frente de seu tempo?

Duas estratégias aparecem repetidamente em sua obra. A primeira foi o uso fervoroso do Princípio do Infinito. Para desvendar os mistérios de círculos, esferas e outras formas curvas, ele sempre as aproximava por formas retilíneas compostas de muitas peças retas e planas.
como joias. Ao imaginar cada vez mais peças e torná-las cada vez menores, ele aproximava suas estimativas da verdade, chegando perto da exatidão no limite de infinitas peças. Essa estratégia exigia que ele fosse um mestre em somas e quebra-cabeças, já que acabava tendo que somar muitos números ou peças para chegar às suas conclusões.

Sua outra estratégia distintiva era a fusão da matemática com a física, do ideal com o real. Especificamente, ele combinava geometria, o estudo das formas, com mecânica, o estudo do movimento e da força. Às vezes, usava a geometria para elucidar a mecânica; outras vezes, o fluxo seguia na direção oposta, com argumentos mecânicos fornecendo insights sobre a forma pura. Foi utilizando ambas as estratégias com maestria que Arquimedes conseguiu penetrar tão profundamente no mistério das curvas.

Espremendo Pi

Quando vou a pé para o escritório ou saio para passear com meu cachorro à noite, o pedômetro do meu iPhone registra a distância percorrida. O cálculo é simples: o aplicativo estima o comprimento da minha passada com base na minha altura e conta quantos passos eu dei, multiplicando os dois valores. A distância percorrida é igual ao comprimento da passada multiplicado pelo número de passos dados.

Arquimedes usou uma ideia semelhante para calcular a circunferência de um círculo e estimar o valor de pi. Imagine o círculo como uma pista. São necessários muitos passos para dar a volta completa. O caminho seria algo parecido com isto.

Cada passo é representado por uma pequena linha reta. Multiplicando o número de passos pelo comprimento de cada um, podemos estimar o comprimento da pista. É apenas uma estimativa, claro, porque o círculo não é formado apenas por linhas retas. É formado por arcos curvos. Quando substituímos cada arco por uma linha reta, estamos fazendo um pequeno atalho. E, portanto, a aproximação certamente será imprecisa.*subestimar*o verdadeiro comprimento da pista circular. Mas, pelo menos em teoria, dando passos suficientes e

Ao torná-las suficientemente pequenas, podemos estimar o comprimento da pista com a precisão que desejarmos.

Arquimedes fez uma série de cálculos como este, começando com um caminho composto por seis passos retos.

Ele começou com um hexágono porque era um ponto de partida conveniente para os cálculos mais árduos que viriam a seguir. A vantagem do hexágono era que ele podia calcular facilmente seu perímetro, o comprimento total ao redor do hexágono. É seis vezes o raio do círculo. Por que seis? Porque o hexágono contém seis triângulos equiláteros, cada lado dos quais é igual ao raio do círculo. Seis dos lados dos triângulos formam o perímetro do hexágono.

r

Assim, o perímetro é igual a seis vezes o raio; em símbolos, $p = 6r$. Então, como a circunferência do círculo C é maior que o perímetro do hexágono p, nós precisamos ter $C > 6r$.

Esse argumento forneceu a Arquimedes um limite inferior para o que chamaríamos de pi, escrito como a letra grega π. *p* e é definida como a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo. Como o diâmetro d igual a $2r$, a desigualdade $C > 6r$ implica

$$p = \frac{C}{d} = \frac{C}{2r} > \frac{6r}{2r} = 3.$$

p

Assim, o argumento do hexágono demonstra $p > 3$.

É claro que seis é um número ridiculamente pequeno de passos, e o hexágono resultante é obviamente uma caricatura muito grosseira de um círculo, mas Arquimedes estava apenas começando. Assim que descobriu o que o hexágono lhe indicava, ele encurtou os passos e dobrou o número deles. Ele fez isso desviando para o ponto médio de cada arco, dando dois passos curtos em vez de atravessar o arco com um único passo largo.

ponto médio

Então ele continuou fazendo isso, repetidamente. Um homem obcecado, ele passou de seis degraus para doze, depois vinte e quatro, quarenta e oito e, finalmente, noventa e seis degraus, calculando seus comprimentos cada vez menores com uma precisão que provocava enxaqueca.

6 12 24

Infelizmente, calcular os comprimentos dos passos tornou-se progressivamente mais difícil à medida que diminuíam, pois ele precisava recorrer constantemente ao teorema de Pitágoras para encontrá-los. Isso exigia o cálculo de raízes quadradas, uma tarefa árdua de se fazer manualmente. Além disso, para garantir que sempre subestimasse a circunferência, ele precisava certificar-se de que suas frações de aproximação delimitassem o problemático quadrado.

raízes de baixo quando ele precisava que fossem subestimadas e de cima quando precisava que fossem superestimadas. O que estou tentando dizer é que seu cálculo de*p*Foi heroico, tanto lógica quanto aritmeticamente. Ao usar um polígono de 96 lados dentro do círculo e um polígono de 96 lados fora do círculo, ele finalmente provou que*p*é maior que 3 + 10/71 e menor que 3 + 10/70.

Esqueça a matemática por um minuto. Apenas aprecie este resultado visualmente:

p

$$3+\frac{10}{71}<p<3+\frac{10}{70}.$$

O valor desconhecido, e para sempre incognoscível, de*p*está preso em uma espécie de prensa numérica, espremido entre dois números que parecem quase idênticos, exceto pelo fato de que o primeiro tem denominador 71 e o segundo, 70. Esse último resultado, 3 + 10/70, se reduz a 22/7, a famosa aproximação de 1/7.*p*que todos os alunos ainda aprendem hoje e que alguns, infelizmente, confundem com*p*em si.

A técnica de compressão usada por Arquimedes (baseada em trabalhos anteriores do matemático grego Eudoxo) é hoje conhecida como método da exaustão, devido à forma como aprisiona o número desconhecido pi entre dois números

conhecidos. Os limites se estreitam a cada duplicação, esgotando assim a margem de erro para pi.

Os círculos são as curvas mais simples da geometria. No entanto, surpreendentemente, medi-los — quantificar suas propriedades com números — transcende a geometria. Por exemplo, você não encontrará nenhuma menção a*p*em Euclides*Elementos*, escrito uma ou duas gerações antes de Arquimedes. Você encontrará uma demonstração por exaustão de que a razão entre a área de um círculo e o quadrado de seu raio é a mesma para todos os círculos, mas nenhuma indicação de que a razão universal seja próxima de 3,14. A omissão de Euclides foi um sinal de que algo mais profundo era necessário. Para compreender*p*O valor numérico de π exigia um novo tipo de matemática, capaz de lidar com formas curvas. Como medir o comprimento de uma linha curva, a área de uma superfície curva ou o volume de um sólido curvo — essas eram as questões de vanguarda que consumiam Arquimedes e o levaram a dar os primeiros passos em direção ao que hoje chamamos de cálculo integral. π foi seu primeiro triunfo.

O Tao de Pi

Pode parecer estranho para as mentes modernas que o pi não apareça na fórmula de Ar Chimedes para a área de um círculo.*A*=*rC*2e que ele nunca escreveu uma equação como*C*=*pd*para relacionar a circunferência de um círculo ao seu diâmetro. Ele evitou fazer tudo isso porque pi não era um número para ele. Era simplesmente uma razão entre dois comprimentos, uma proporção entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. Era uma grandeza, não um número.

Já não fazemos essa distinção entre magnitude e número, mas ela era importante na matemática da Grécia Antiga. Parece ter surgido da tensão entre o discreto (representado por números inteiros) e o contínuo (representado por formas). Os detalhes históricos são obscuros, mas parece que em algum momento...
Entre Pitágoras e Eudoxo, entre os séculos VI e IV a.C., alguém provou que a diagonal de um quadrado era incomensurável com seu lado, ou seja, a razão entre essas duas medidas não podia ser expressa como a razão entre dois números inteiros. Em linguagem moderna, alguém descobriu a existência dos números irracionais. Suspeita-se que essa descoberta tenha chocado e desagradado a

humanidade.
apontaram os gregos, já que isso contradizia o credo pitagórico. Se os números inteiros e suas proporções não conseguiam medir nem mesmo algo tão básico quanto a diagonal de um quadrado perfeito, então tudo estava perdido.*não* número. Essa decepção com o achatamento pode explicar por que os matemáticos gregos posteriores sempre priorizaram a geometria em detrimento da aritmética. Não se podia confiar nos números.
não eram mais suficientes. Eram inadequados como fundamento para a matemática. Para descrever quantidades contínuas e raciocinar sobre elas, os matemáticos da Grécia Antiga perceberam que precisavam inventar algo mais poderoso do que os números inteiros. Então, desenvolveram um sistema baseado em formas e suas proporções. Esse sistema se baseava em medidas de objetos geométricos: comprimentos de linhas, áreas de quadrados, volumes de cubos. A todas essas grandezas foram chamadas de magnitudes. Eles as consideravam distintas dos números e superiores a eles.

Acredito que foi por isso que Arquimedes manteve o pi à distância. Ele não sabia o que pensar dele. Era uma criatura estranha e transcendente, mais exótica do que qualquer número.

Hoje, aceitamos o pi como um número — um número real, um decimal infinito — e um número fascinante. Meus filhos certamente ficavam intrigados com ele. Costumavam olhar fixamente para uma forma de torta pendurada na nossa cozinha, que tinha os dígitos de pi dispostos em espiral ao redor da borda.
convergindo em direção ao centro, diminuindo de tamanho à medida que mergulhavam no abismo. Para eles, o fascínio residia na sequência aparentemente aleatória de dígitos, que nunca se repetia, nunca apresentava qualquer padrão, perdurando infinitamente, o infinito à disposição. Os primeiros dígitos da expansão decimal infinita de pi são

3.14159265358979323846264338327950288419716939
93751058209749 . . .

Jamais saberemos todos os dígitos de pi. No entanto, esses dígitos estão por aí, esperando para serem descobertos. Até o momento em que escrevo, vinte e dois trilhões de dígitos foram computados pelos computadores mais rápidos do mundo.

Contudo, vinte e dois trilhões não são nada comparados à infinidade de dígitos que definem o próprio pi. Pense em quão filosoficamente perturbador isso é. Eu disse que os dígitos de pi estão por aí, mas onde exatamente eles estão? Eles não existem no mundo material. Eles existem em algum reino platônico, junto com conceitos abstratos como verdade e justiça.

Há algo de paradoxal no pi. Por um lado, ele representa a ordem, personificada pela forma de um círculo, há muito considerado um símbolo de perfeição e eternidade. Por outro lado, o pi é indomável, de aparência desordenada, seus dígitos não obedecendo a nenhuma regra óbvia, ou pelo menos nenhuma que possamos perceber. O pi é elusivo e misterioso, para sempre inalcançável. Essa mistura de ordem e desordem é o que o torna tão fascinante.

Pi é fundamentalmente um filho do cálculo. É definido como o limite inatingível de um processo sem fim. Mas, ao contrário de uma sequência de polígonos que se aproximam inexoravelmente de um círculo ou de um pedestre desavisado que dá um passo em direção a uma parede, não há fim à vista para pi, nenhum limite que possamos conhecer. E, no entanto, pi existe. Lá está ele, definido com tanta precisão como a razão entre dois comprimentos que podemos ver bem diante de nós: a circunferência de um círculo e seu diâmetro. Essa razão define pi, o identifica com a maior clareza possível, e ainda assim o próprio número nos escapa por entre os dedos.

Com seus binários yin e yang, o pi é como todo o cálculo em miniatura. Pi é um portal entre o redondo e o reto, um único número, porém infinitamente complexo, um equilíbrio entre ordem e caos. O cálculo, por sua vez, usa o infinito para estudar o finito, o ilimitado para estudar o limitado e o reto para estudar a curva. O Princípio do Infinito é a chave para desvendar o mistério das curvas, e surgiu aqui, primeiramente, no mistério do pi.

Cubismo encontra Cálculo

Em seu tratado, Arquimedes aprofundou-se no mistério das curvas, novamente guiado pelo Princípio do Infinito.*A Quadratura da Pa rabola.*Uma parábola descreve o arco familiar de uma cesta de três pontos no basquete ou da água saindo de um bebedouro. Na verdade, esses arcos no mundo real são apenas aproximadamente

parabólicos. Para Arquimedes, uma parábola verdadeira seria uma curva obtida ao cortar um cone com um plano. Imagine um cutelo cortando um chapéu de burro ou um copo de papel cônico; o cutelo pode fazer diferentes tipos de curvas dependendo da inclinação do corte. Um corte paralelo à base de um cone forma um círculo.

círculo

Um corte ligeiramente mais íngreme produz uma elipse.

elipse

Um corte que tem a mesma inclinação do próprio cone produz um pa rabola.

parábola

Vista no plano da seção transversal, a parábola aparece como uma curva graciosa e simétrica com uma linha de simetria no seu centro. Essa linha é chamada de eixo da parábola.

parábola

eixo

Em seu tratado, Arquimedes propôs a si mesmo o desafio de calcular a quadratura de um segmento parabólico. Em linguagem mais moderna, um segmento de parábola significa a região curva situada entre a parábola e uma reta que a corta obliquamente.

parabólico
segmento

Encontrar sua quadratura significa expressar sua área desconhecida em termos da área conhecida de uma forma mais simples, como um quadrado, retângulo, triângulo ou outra figura retilínea.

A estratégia utilizada por Arquimedes foi surpreendente. Ele reimaginou o segmento parabólico como infinitos fragmentos triangulares colados uns aos outros como pedaços de cerâmica quebrada.

Os fragmentos vinham em uma hierarquia infinita de tamanhos: um grande triângulo, dois menores, quatro ainda menores, e assim por diante. Seu plano era encontrar a área de todos eles e somá-las para calcular a área curva que tanto o intrigava. Foi preciso um salto caleidoscópico de imaginação artística para enxergar um segmento parabólico suave e delicadamente curvado como um mosaico de formas irregulares. Se tivesse sido pintor, Ar Chimedes teria sido o primeiro cubista.

Para executar sua estratégia, Arquimedes primeiro precisava determinar as áreas de todos os fragmentos. Mas como, exatamente, definir essas áreas? Afinal, existem inúmeras maneiras de juntar triângulos para formar um segmento parabólico, assim como existem inúmeras maneiras de quebrar um prato em pedaços irregulares. O maior triângulo poderia ter esta aparência, ou esta, ou

esta:

Ele teve uma ideia brilhante — brilhante porque estabelecia uma regra, um padrão consistente que se mantinha de um nível da hierarquia para o seguinte. Ele imaginou deslizar a linha oblíqua na base do segmento para cima, mantendo-a paralela a si mesma, até que ela apenas tocasse a parábola em um único ponto próximo ao topo.

Esse ponto especial de contato de pastoreio é chamado de ponto de tangência (do latim).*Tânger*, que significa "tocando"). Definiu o terceiro vértice do triângulo maior, sendo os outros dois os pontos onde a linha oblíqua cortava a parábola.

Arquimedes usou a mesma regra para definir os triângulos em*todo* estágio na hierarquia. No segundo estágio, por exemplo, os triângulos tinham esta aparência.

Observe que os lados do triângulo maior agora desempenham o papel da linha oblíqua usada anteriormente.

Em seguida, Arquimedes invocou fatos geométricos conhecidos sobre parabolas e triângulos para relacionar um nível da hierarquia ao seguinte. Ele provou que cada triângulo recém-criado tinha um oitavo da área do seu triângulo original. Assim, se dissermos que o primeiro triângulo, o maior, ocupa 1 unidade de área — esse triângulo servirá como nosso padrão de área — então seus dois triângulos filhos juntos ocupam 1/8 + 1/8 = 1/4 da área original.

1
–
81
–
8
1

Em cada etapa subsequente, a mesma regra se aplica: os triângulos filhos sempre contribuem com um total de um quarto da área do triângulo pai. Portanto, a área total do segmento parabólico, remontado a partir de toda a hierarquia infinita de fragmentos, deve ser

$$\text{Área} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots,$$

Uma série infinita em que cada termo é um quarto do termo anterior.

Existe um atalho para somar esse tipo de série infinita, conhecido na área como série geométrica. O truque é cancelar todos os seus infinitos termos, exceto um, multiplicando ambos os lados da equação por *Área* por 4 e subtraindo a soma original. Veja: Multiplicar cada termo por 4 na série infinita acima resulta em

$$\begin{aligned} 4 \cdot \text{Área} &= 4\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) \\ &= 4 + \frac{4}{4} + \frac{4}{16} + \frac{4}{64} + \cdots \\ &= 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots \\ &= 4 + \text{Área}. \end{aligned}$$

A mágica acontece entre a penúltima linha e a última linha acima. O lado direito da última linha é igual a 4 + *Área*, porque a soma original, $\text{Área} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots$, renasceu, como uma fênix, nos termos que se seguem ao 4 na penúltima linha. Então

$$4 \times \text{Área} = 4 + \text{Área}.$$

Subtraia um *Área* de ambos os lados para obter $3 \times \text{Área} = 4$. Portanto, $\text{Área} = \frac{4}{3}$.

Em outras palavras, o segmento parabólico tem 4/3 da área do triângulo maior.

Um argumento piegas

Arquimedes não teria aprovado a artimanha acima. Ele chegou ao mesmo resultado por um caminho diferente. Recorreu a um estilo sutil de argumentação, frequentemente descrito como duplo.*redução ao absurdo*, uma prova dupla por contradição. Ele provou que a área do segmento parabólico não poderia ser menor que 4/3 nem maior que 4/3, portanto, deveria ser igual a 4/3. Como Sherlock Holmes disse mais tarde: “Quando você tem

eliminou o impossível, o que quer que reste,*por mais improvável que seja,*"Deve ser a verdade."

O que é conceitualmente crucial aqui é que Arquimedes eliminou o impossível com argumentos baseados em um*finito*número de fragmentos. Ele demonstrou que a área combinada deles poderia ser tão próxima de 4/3 quanto desejado, mais próxima do que qualquer tolerância prescrita, simplesmente coletando uma quantidade suficiente deles. Ele nunca precisou invocar o infinito. Portanto, tudo em sua prova era irrefutável. Ela ainda atende aos mais altos padrões de rigor atualmente.

A essência do seu argumento torna-se fácil de entender se a usarmos em termos do dia a dia. Suponha que três pessoas queiram dividir quatro fatias idênticas de queijo.

segundo
sobras
o resto
41
4
1
1
1primeir
1
4
1 1
11

A solução mais sensata seria dar uma fatia para cada pessoa, depois cortar a fatia restante em três partes e distribuí-las. Isso é justo. No total, todos receberiam 1 + 1/3 = 4/3 de uma fatia.

Mas suponha que as três pessoas sejam matemáticos que estão circulando pela mesa de comida antes do seminário, de olho nas últimas quatro fatias de queijo. O mais esperto dos três, coincidentemente chamado Arquimedes, poderia sugerir a seguinte solução: “Eu pego uma fatia e vocês pegam as suas, o que deixa uma para nós dividirmos. Euclides, corte essa fatia que sobrou em...*alojamentos*Não dividam em três partes, e todos peguem um

quarto da fatia que sobrou. Vamos continuar fazendo isso, sempre cortando o que sobra em quatro porções iguais, até que as migalhas restantes não interessem a ninguém. Certo? Eudoxus, pare de reclamar.

1
1
256
1024

1
64

1
16

1
4

1

Quantas fatias de queijo, no total, cada um deles conseguiria comer se isso continuasse indefinidamente? Uma maneira de analisar a situação é manter uma contagem de quantas fatias cada pessoa recebe. Após a primeira rodada, cada um recebe uma fatia. Após a segunda rodada, quando as fatias menores são distribuídas, cada pessoa terá acumulado 1 + 1/4 fatias. Após a terceira rodada, quando as fatias menores são divididas em dezesseis partes, o total acumulado para cada um é de 1 + 1/4 + 1/16 fatias. E assim por diante. De forma geral, cada uma das três pessoas acabaria comendo... 1 + 1/4 + 1/16 + . . . fatias no total, se o corte continuasse indefinidamente. E como essa quantidade deve representar um terço das quatro fatias originais, deve ser que 1 + 1/4 + 1/16 + . . . é igual a um terço de 4, que é 4/3.

Em *A quadratura da parábola* Arquimedes apresentou um argumento muito semelhante a este, incluindo um diagrama com quadrados de tamanhos diferentes, mas nunca invocou o infinito nem usou a contrapartida dos três pontos [!] acima para significar que a soma continuava indefinidamente. Em vez disso, ele formulou seu argumento em termos de somas finitas para que fosse não-im

rigorosamente perfeito. Sua principal observação foi que o pequeno quadrado no canto superior direito — a sobra atual a ser compartilhada — poderia ser reduzido a um valor menor do que

qualquer quantia dada, considerando-se um número suficientemente grande, porém finito, de rodadas. E por razões semelhantes,soning, a soma finita $1 + 1/4 + 1/16 + \cdots + 1/4^n$ (a quantidade total de queijo que cada pessoa recebe) poderia ser ajustada para se aproximar de 4/3, conforme desejado, fazendo *n* grande o suficiente. Portanto, a única resposta possível era 4/3.

O Método

É nesse ponto que começo a sentir um carinho genuíno por Arquimedes, porque ele faz algo em um de seus ensaios que poucos gênios conseguem: ele nos convida a entrar e revela como pensa. (Estou usando o presente do indicativo aqui porque o ensaio é tão íntimo que parece que ele está falando conosco hoje.) Ele compartilha sua intuição particular, algo vulnerável e sensível, e diz que espera que os futuros matemáticos a usem para resolver problemas que o escaparam. Hoje, esse segredo é conhecido como o Método. Nunca ouvi falar dele nas aulas de cálculo. Não o ensinamos mais. Mas achei a história e a ideia por trás dele fascinantes e surpreendentes.

Ele escreve sobre isso em uma carta ao seu amigo Eratóstenes, o bibliotecário de Alexandria e o único matemático de sua época capaz de compreendê-lo. Confessa que, embora seu Método "não forneça uma demonstração concreta" dos resultados que lhe interessam, ele o ajuda a descobrir a verdade. Dá-lhe intuição. Como ele mesmo diz: "É mais fácil apresentar a prova quando já adquirimos, por meio do método, algum conhecimento sobre as questões, do que encontrá-la sem nenhum conhecimento prévio". Em outras palavras, ao experimentar, ao brincar com o Método, ele adquire familiaridade com o assunto. E isso o guia para uma prova irrefutável.

Este é um relato muito honesto de como é fazer matemática criativa. Os matemáticos não elaboram as demonstrações primeiro. Primeiro vem a intuição. O rigor vem depois. Esse papel essencial da intuição e da imaginação é frequentemente deixado de lado nos cursos de geometria do ensino médio, mas é fundamental para toda matemática criativa.

Arquimedes conclui com a esperança de que "haverá alguns, tanto da geração presente quanto das futuras, que, por meio do

método aqui explicado, serão capazes de encontrar outros teoremas que ainda não foram descobertos por nós”. Isso quase me emociona. Esse gênio insuperável, sentindo a finitude de sua vida diante da infinitude da matemática, reconhece que ainda há muito a ser feito, que existem “outros teoremas que ainda não foram descobertos por nós”. Todos nós, matemáticos, sentimos isso. Nossa área de estudo é infinita. Ela humilhou até mesmo o próprio Arquimedes.

A primeira menção ao Método aparece no início do ensaio sobre a quadratura da parábola, antes da demonstração cubista com os fragmentos. Arquimedes confessa que o Método o levou a essa demonstração e, em primeiro lugar, ao número 4/3.

O que é o Método e o que o torna tão pessoal, brilhante e transgressor? O Método é*mecânico;*Arquimedes calcula a área do segmento parabólico por*pesando*Ele imagina isso em sua mente. Ele pensa na região parabólica curva como um objeto material — eu estou picando

Ele transforma a chapa de metal em uma fina lâmina cuidadosamente cortada no formato parabólico desejado e a coloca em uma das extremidades de uma balança imaginária. Ou, se preferir, imagine-a em uma das extremidades de uma gangorra imaginária. Em seguida, ele calcula como contrabalançá-la com uma forma que ele já sabe pesar: um triângulo. A partir disso, ele deduz a área do segmento parabólico original.

É uma abordagem ainda mais imaginativa do que a técnica cubista/geométrica/de fragmentos e triângulos que discutimos anteriormente, porque, neste caso, ele vai construir a gangorra imaginária como parte do cálculo e projetá-la para se adequar às dimensões da parábola. Juntos, eles produzirão a resposta que ele busca.

Ele começa com o segmento parabólico e o inclina para garantir que o eixo de simetria da parábola fique vertical.

eixo

Em seguida, ele constrói a gangorra em volta disso. O manual de instruções diz o seguinte:*Desenhe o triângulo grande dentro do segmento parabólico, como antes, e rotule-o como ABC.*Assim como na

demonstração cubista, este triângulo servirá novamente como padrão de área. O segmento parabólico será comparado a ele e terá quatro terços de sua área.

UM B

C

Em seguida, envolva o segmento parabólico em um triângulo muito maior, ACD.

D

B

C

A

O lado superior do triângulo é escolhido como uma linha tangente à parábola no ponto C. Sua base é a linha AC. E seu lado esquerdo é uma linha vertical que se estende para cima a partir de A até encontrar o lado superior no ponto D. Usando a geometria euclidiana padrão, Arquimedes prova que este enorme triângulo externo ACD tem quatro vezes a área do triângulo interno ABC. (Esse fato se tornará importante mais tarde. Deixe-o de lado por enquanto.)

O próximo passo é construir o resto da gangorra — sua alavanca, seus dois assentos e seu fulcro. A alavanca é a linha que une os dois assentos. Essa linha começa em C, passa por B, emerge do enorme triângulo externo em F (o fulcro) e continua para a esquerda até atingir um ponto S (o assento). A condição que define S é que ele esteja à mesma distância de F que C. Em outras palavras, F é o ponto médio da linha SC.

S

F

A

B

C

D

E agora surge a descoberta surpreendente que fundamenta toda a concepção. Utilizando fatos conhecidos sobre parábolas e triângulos, Archi Medes demonstra que é possível equilibrar o enorme triângulo externo com o segmento parabólico, se ele pensar sobre eles.*uma linha vertical de cada vez*Ele considera ambos como sendo compostos de infinitamente

muitas linhas paralelas. Essas linhas são como ripas ou costelas infinitesimalmente finas. Aqui está um par típico delas, definido por uma única linha vertical que atravessa ambas as formas. Nessa linha, uma pequena costela conecta a base à parábola.

S

F

costela curta

e uma costela alta conecta a base à parte superior do enorme triângulo externo.

S

F

costela alta

Sua incrível sacada é que essas costelas se equilibram perfeitamente, como crianças brincando em uma gangorra, desde que estejam posicionadas corretamente. Ele demonstra que, se deslizar a costela curta até o ponto S e deixar a costela longa no lugar, elas se equilibram.

S

costela curta
fica em
S

F

costelas altas
no local

C

O mesmo se aplica a*todo* corte vertical. Independentemente do corte vertical escolhido, a costela curta sempre equilibra a costela alta se você deslizar a costela curta em forma de S e deixar a costela alta no lugar.

Assim, as duas formas se equilibram, nervura por nervura. Todas as nervuras da parábola terminam em S. Juntas, elas equilibram todas as nervuras do enorme triângulo externo ACD. E como essas nervuras não se moveram, isso significa que toda a massa parabólica deslocada para S equilibra o enorme triângulo exatamente onde ele está.

Em seguida, Arquimedes substitui as infinitas costelas do enorme triângulo externo por um ponto equivalente, chamado centro de gravidade do triângulo. Ele serve como um indicador. No que diz respeito às gangorras, o enorme triângulo se comporta como se toda a sua massa estivesse concentrada nesse único centro de gravidade. Essa localização, como Arquimedes já demonstrou em outros trabalhos, situa-se na linha FC, em um ponto precisamente três vezes mais próximo do fulcro F do que o ponto S.

Como toda a massa do triângulo está três vezes mais próxima do ponto de pivô, o segmento parabólico deve pesar um terço do peso do triângulo maior para que haja equilíbrio; essa é a lei da alavanca. Portanto, a área do segmento parabólico deve ser um terço da área do triângulo externo ACD. E como esse triângulo externo tem quatro vezes a área do triângulo interno ABC (fato que já mencionamos), Arquimedes deduz que o segmento parabólico deve ter 4/3 da área do triângulo ABC em seu interior... exatamente como descobrimos anteriormente ao somar a série infinita de fragmentos triangulares!

Espero ter conseguido transmitir o quão alucinante é esse argumento. Em vez de um oleiro remontando cacos, aqui Arquimedes se assemelha mais a um açougueiro. Ele desmembra o tecido da região parabólica, uma tira vertical de cada vez, e pendura

todas essas tiras infinitesimalmente finas de carne em um gancho em S. O peso total de toda a carne permanece o mesmo de quando era um segmento parabólico intacto. Acontece que ele fragmentou a forma original em várias tiras verticais e fibrosas, todas penduradas no mesmo gancho. (É uma imagem tão estranha. Talvez devêssemos continuar usando gangorras.)

Por que chamei esse argumento de transgressor? Porque ele lida com o infinito completo. Em um dado momento, Arquimedes descreve abertamente

O triângulo externo é descrito como sendo "composto por todas as linhas paralelas" em seu interior. Isso, é claro, é tabu na matemática grega; existe uma infinidade contínua dessas linhas paralelas, dessas nervuras verticais. Ele está pensando abertamente no triângulo como uma infinidade completa de nervuras. Ao fazer isso, ele está libertando o golem.

Da mesma forma, ele descreve o segmento parabólico como sendo "constituído por todas as linhas paralelas traçadas dentro da curva". Lidar com o infinito completo rebaixa o status desse raciocínio, em sua avaliação, a uma heurística — um meio de encontrar uma resposta, não uma prova de sua correção. Em sua carta a Eratóstenes, ele minimiza o Método, dizendo que ele não fornece nada mais do que "uma espécie de indicação" de que a conclusão é verdadeira.

Independentemente de seu status lógico, o Método de Arquimedes tem um*Um entre muitos*qualidade nisso. Essa frase em latim, o lema dos Estados Unidos, significa "de muitos, um". Das infinitas linhas retas que compõem a parábola, emerge uma área. Pensando nessa área como uma massa, Arquimedes a desloca, linha por linha, para o assento mais à esquerda da gangorra. A infinitude de linhas é, assim, representada por uma única massa situada em um único ponto. O um substitui os muitos e o representa, simbolizando-o de forma perfeita e fiel.

O mesmo se aplica ao triângulo externo de contrapeso à direita da gangorra. De seu contínuo de linhas verticais, um ponto é escolhido — seu centro de gravidade. Ele também representa o todo. O infinito se reduz à unidade;*um entre muitos*Só que isto não é poesia nem política.
tiques. Este é o início do cálculo integral. Triângulos e regiões parabólicas são aparentemente e misteriosamente equivalentes, em

um sentido que Arquimedes não conseguiu tornar totalmente rigoroso, a infinitas linhas verticais.

Embora Arquimedes pareça constrangido por seu flerte com o infinito, ele é corajoso o suficiente para admiti-lo. Qualquer pessoa que tente medir uma forma curva — para encontrar o comprimento de seu contorno, a área ou o volume interno — precisa lidar com o limite de uma soma infinita de partes infinitesimalmente pequenas. Almas cautelosas podem tentar contornar essa necessidade, usando o método da exaustão. Mas, no fundo, não há como escapar dela. Lidar com formas curvas significa

Lidar com o infinito, de uma forma ou de outra. Arquimedes é franco quanto a isso. Quando precisa, ele pode disfarçar suas demonstrações com uma roupagem respeitável, ostentando somas finitas e o método da exaustão. Mas em particular, ele é perverso. Ele admite ponderar formas em sua mente, sonhar com alavancas e centros de gravidade, equilibrar regiões e sólidos linha por linha, uma peça infinitesimal de cada vez.

Arquimedes aplicou o método a muitos outros problemas relacionados a formas curvas. Por exemplo, ele o utilizou para descobrir o centro de gravidade de um hemisfério sólido, de um paraboloide e de segmentos de elipsoides e hiperboloides. Seu resultado favorito, que ele tanto amava a ponto de pedir que fosse gravado em sua lápide, dizia respeito à área da superfície e ao volume de uma esfera.

Imagine uma esfera encaixada perfeitamente dentro de uma caixa de chapéu cilíndrica.

Utilizando o método, Arquimedes descobriu que a esfera tem 2/3 do volume da caixa de chapéus que a contém, bem como 2/3 da sua área de superfície (considerando que as tampas superior e inferior também são contabilizadas na área da superfície da caixa).

Observe que ele não forneceu o volume da esfera.*fórmulas*para o volume ou a área da superfície da esfera, como faríamos hoje. Em vez disso, ele expressou seus resultados em termos de proporções. Esse é o estilo clássico grego. Tudo era expresso como uma proporção. Uma área era comparada a outra área, um volume a outro volume. E quando a razão envolvia pequenos números inteiros, como acontece aqui com 3 e 2 e como acontecia com 4 e 3 na quadratura da parábola, isso devia ser uma fonte de particular prazer para ele. Afinal, essas mesmas proporções, 3:2 e 4:3, tinham um significado especial para os antigos gregos devido ao seu papel central na teoria pitagórica da harmonia musical.

Lembre-se de que, quando duas cordas idênticas, com comprimentos na proporção de 3:2, são percutidas, elas harmonizam-se lindamente, separadas em altura por um intervalo conhecido como quinta. Da mesma forma, cordas na proporção de 4:3 produzem uma quarta. Essas coincidências numéricas entre harmonia e geometria devem ter encantado Arquimedes.

Suas palavras em seu ensaio "Sobre a Esfera e o Cilindro" sugerem o quão entusiasmado ele estava: "Ora, essas propriedades sempre foram inerentes às figuras, mas permaneceram desconhecidas para aqueles que, antes de mim, se dedicavam ao estudo da geometria." Ignore o tom de orgulho em sua voz e concentre-se em sua afirmação de que as propriedades que descobriu "sempre foram inerentes às figuras, mas permaneceram desconhecidas". Aqui, ele expressa uma filosofia particular da matemática, cara ao coração de todos os matemáticos atuantes. Sentimos que somos*descobrindo*matemática. Os resultados estão aí, espere.

Elas já existem para nós. Sempre estiveram inerentes às figuras. Não as estamos inventando. Ao contrário de Bob Dylan ou Toni Morrison, não estamos criando músicas ou romances que nunca existiram; estamos descobrindo fatos que já existem, que são inerentes aos objetos que estudamos. Embora tenhamos liberdade criativa para inventar os próprios objetos — para criar idealizações como esferas, círculos e cilindros perfeitos — uma vez que o fazemos, eles ganham vida própria.

Ao ler a forma como Arquimedes expressa seu prazer ao revelar a área da superfície e o volume da esfera, sinto como se estivesse sentindo as mesmas coisas que ele sentiu. Ou melhor, que*ele* estava sentindo as mesmas coisas que eu sinto e isso*todos* É

assim que meus colegas se sentem quando fazemos matemática. Embora nos digam que o passado é um país estrangeiro, talvez não seja estrangeiro em todos os aspectos. As pessoas sobre as quais lemos em Homero e na Bíblia parecem muito conosco. E o mesmo parece ser verdade para os matemáticos da antiguidade, ou pelo menos para Arquimedes, o único que nos permitiu entrar em seu coração.

Vinte e dois séculos atrás, Arquimedes escreveu uma carta ao seu amigo Eratóstenes, o bibliotecário de Alexandria, enviando-lhe essencialmente uma mensagem matemática numa garrafa que praticamente ninguém conseguia compreender, mas que ele esperava que pudesse, de alguma forma, navegar em segurança pelos mares do tempo. Ele compartilhou sua intuição particular, seu Método, no desejo de que pudesse permitir que as gerações futuras de

matemáticos "para encontrar outros teoremas que ainda não tivessem sido descobertos por nós". As probabilidades estavam contra ele. Como sempre, o tempo foi cruel. Reinos caíram e bibliotecas foram queimadas. Manuscritos se deterioraram. Não se sabe de nenhuma cópia do Método que tenha sobrevivido à Idade Média. Embora Leonardo da Vinci, Galileu, Newton e outros gênios do Renascimento e da revolução científica tenham se debruçado sobre o que restava dos tratados de Arquimedes, eles nunca tiveram a chance de ler o Método. Acreditava-se que ele estivesse irremediavelmente perdido.

E então, milagrosamente, foi encontrado.

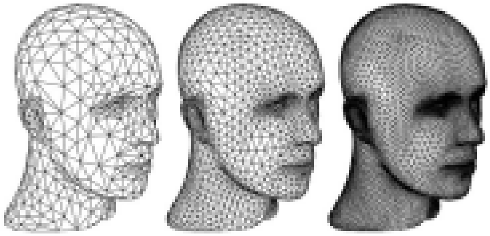
Em outubro de 1998, um livro de orações medieval bastante deteriorado foi leiloado na Christie's e vendido a um colecionador particular anônimo por US$ 2,2 milhões. Mal visíveis sob as orações em latim, jaziam tênues diagramas geométricos e textos matemáticos escritos em grego do século X. O livro é um palimpsesto; no século XIII, suas folhas de pergaminho foram lavadas e raspadas, removendo-se o grego original e sobrepondo-se a textos litúrgicos em latim. Felizmente, o grego não foi completamente apagado. Ele contém a única cópia sobrevivente do Método de Arquimedes.

O Palimpsesto de Arquimedes, como é conhecido hoje, foi descoberto pela primeira vez em 1899 em uma biblioteca ortodoxa grega em Constantinopla. Passou o Renascimento e a Revolução Científica sem ser detectado, guardado em um livro de orações no

mosteiro de São Sabas, perto de Belém. Atualmente, encontra-se no Walters Art Museum, em Baltimore, onde foi cuidadosamente restaurado e examinado com o auxílio da mais moderna tecnologia de imagem.

Arquimedes hoje: Da animação computadorizada à cirurgia facial

O legado de Arquimedes continua vivo até hoje. Considere os filmes de animação computadorizada que nossos filhos adoram assistir. Os personagens em filmes como*Shrek*,*Procurando Nemo*, e *Toy Story*parecem realistas e vívidas, em parte porque incorporam uma ideia arquimediana: qualquer superfície lisa pode ser aproximada de forma convincente por triângulos. Por exemplo, aqui estão três triangulações da cabeça de um manequim.



Quanto mais triângulos usarmos e quanto menores forem, melhor será a aproximação.

O que vale para manequins vale igualmente para ogros, peixes-palhaço e cowboys de brinquedo. Assim como Arquimedes usou um mosaico de infinitos fragmentos triangulares para representar um segmento de uma parábola suavemente curvada, os animadores modernos da DreamWorks criaram a barriga redonda do Shrek e suas adoráveis orelhinhas em forma de trombeta a partir de dezenas de milhares de fragmentos triangulares.
areias de polígonos. Ainda mais foram necessários para uma cena de torneio em que Shrek lutava contra valentões locais; cada quadro dessa cena consumiu mais de quarenta e cinco milhões de polígonos. Mas não havia nenhum vestígio deles em lugar nenhum do filme final. Como nos ensina o Princípio do Infinito, o reto e o irregular podem se passar pelo curvo e pelo suave.

Quando *Avatar*Lançado quase uma década depois, em 2009, o nível de detalhamento poligonal tornou-se ainda mais extravagante. Por insistência do diretor James Cameron, os animadores usaram cerca de um milhão de polígonos para renderizar cada planta no mundo

imaginário de Pandora. Dado que o filme se passava em uma exuberante selva virtual, isso representava um número impressionante de polígonos.*muito* de plantas... e muitos polígonos. Não é de admirar.*Avatar*Custou trezentos milhões de dólares para ser produzido. Foi o primeiro filme a usar bilhões de polígonos. Os primeiros filmes gerados por computador usavam muito menos polígonos. Mesmo assim, os cálculos pareciam impressionantes na época. Considere*Toy Story,*Lançado em 1995. Naquela época, um único animador levava uma semana para sincronizar uma cena de oito segundos. O filme inteiro levou quatro anos e oitocentas mil horas de processamento computacional para ser concluído. Como disse Steve Jobs, cofundador da Pixar, ao afirmar:*Com fio*"Há mais doutores trabalhando neste filme do que em qualquer outro na história do cinema."

Logo depois*Toy Story*veio *O Jogo de Geri,*O primeiro filme de animação computadorizada com um personagem principal humano. Esta história engraçada/triste de

Um velho solitário que joga xadrez sozinho no parque ganhou o Oscar de Melhor Curta-Metragem de Animação em 1998.

Assim como outros personagens gerados por computador, Geri foi construída a partir de formas angulares. No início desta seção, mostrei uma imagem gerada por computador de um rosto feito de um número cada vez maior de triângulos. De maneira semelhante, os animadores da Pixar moldaram a cabeça de Geri a partir de um poliedro complexo, uma forma tridimensional semelhante a uma gema, composta por cerca de quatro mil e quinhentos vértices com faces planas entre eles. Os animadores subdividiram essas faces repetidamente para criar uma representação cada vez mais detalhada. Esse processo de subdivisão

ocupava muito menos memória do computador do que os métodos anteriores e permitia animações muito mais rápidas. Foi um avanço revolucionário na animação por computador na época. Mas, em essência, remetia a Arquimedes. Lembre-se de que, para estimar o valor de pi, Arquimedes começou com um hexágono, depois subdividiu cada um de seus lados e projetou seus pontos médios para o círculo, gerando um dodecagonal. Após mais uma subdivisão, o 12-gon tornou-se um 24-gon, depois um 48-gon e, finalmente, um 96-gon, cada um se aproximando cada vez mais de seu alvo, um círculo limitador. Da mesma forma, os animadores de Geri aproximaram a testa enrugada do personagem, seu nariz proeminente e as dobras de pele em seu pescoço subdividindo repetidamente um polígono. Ao repetir esse processo vezes suficientes, eles conseguiram fazer com que Geri se parecesse com o que ele deveria ser: um personagem semelhante a um fantoche que transmitia uma ampla gama de sentimentos humanos.

Alguns anos depois, uma rival da Pixar, a DreamWorks, deu os próximos passos.

Eles avançaram em realismo e expressividade emocional em sua história de um ogro fedorento, mal-humorado e heroico chamado Shrek.

Embora nunca tenha existido fora de um computador, Shrek parecia praticamente humano. Isso se devia, em parte, ao grande cuidado dos animadores em reproduzir a anatomia humana. Sob sua pele virtual, eles construíram músculos, gordura, ossos e articulações virtuais. O trabalho foi feito com tanta fidelidade que, quando Shrek abria a boca para falar, a pele de seu pescoço formava um queixo duplo.

O que nos leva a outro campo onde a ideia de Arquimedes

sobre a aproximação poligonal se mostrou útil: a cirurgia facial para pacientes com sobremordida severa, mandíbulas desalinhadas ou outras malformações congênitas. Em 2006, os matemáticos aplicados alemães Peter Deuflhard, Martin Weiser e Stefan Zachow relataram os resultados de seu trabalho utilizando cálculo e modelagem computacional para prever os resultados de cirurgias faciais complexas.

O primeiro passo da equipe foi construir um mapa preciso da estrutura óssea facial do paciente. Para isso, eles realizaram exames de tomografia computadorizada (TC) ou ressonância magnética (RM) nos pacientes. Os resultados forneceram informações sobre a configuração tridimensional dos ossos faciais no crânio, a partir das quais os pesquisadores criaram um modelo computacional do rosto do paciente. O modelo não era apenas geometricamente preciso; era também biomecanicamente preciso. Ele incorporava estimativas realistas das propriedades dos materiais da pele e dos tecidos moles, como gordura, músculos, tendões, ligamentos e vasos sanguíneos. Com o

Com a ajuda do modelo computacional, os cirurgiões podiam então realizar operações em pacientes virtuais, de forma semelhante a como os pilotos de caça aprimoram suas habilidades em simuladores de voo. Ossos virtuais da face, mandíbula e crânio podiam ser cortados, reposicionados, aumentados ou removidos completamente. O computador calculava como o tecido mole virtual atrás da face se moveria e se reconfiguraria em resposta às tensões produzidas pela nova estrutura óssea da face.

Os resultados dessas simulações foram úteis de diversas maneiras. Alertaram os cirurgiões sobre os possíveis efeitos adversos que os procedimentos poderiam ter em estruturas vulneráveis, como nervos, vasos sanguíneos e raízes dos dentes. Também revelaram a aparência que o rosto do paciente teria no pós-operatório, uma vez que o modelo previa como o tecido mole reagiria.

As simulações permitiriam que os pacientes se reposicionassem após a recuperação. Outra vantagem era que os cirurgiões podiam se preparar melhor para as cirurgias reais, com base nos resultados das simulações. E os pacientes podiam tomar decisões mais informadas sobre a realização ou não das cirurgias.

Arquimedes entrou em cena quando os pesquisadores modelaram a superfície lisa bidimensional do crânio com um

número enorme de triângulos. O tecido mole apresentou seus próprios desafios geométricos. Ao contrário do crânio, o tecido mole forma um volume tridimensional completo. Ele preenche o espaço complexo na frente do crânio e atrás da pele do rosto. A equipe o representou por centenas de milhares de tetraedros, os equivalentes tridimensionais dos triângulos. Na imagem abaixo, a superfície do crânio é aproximada por 250.000 triângulos (eles são pequenos demais para serem vistos) e o volume do tecido mole consiste em 650.000 tetraedros.